Vorlesung vom 02.12.2002: Abstrakte Datentypen

Inhalt

- Letzte VL:
  - Datenabstraktion durch algebraische Datentypen
  - Mangelndes information hiding
- Heute: abstrakte Datentypen (ADTs) in Haskell
- Beispiele für bekannte ADTs:
  - `Store`
  - Stapel und Schlangen: `Stack` und `Queue`
  - Endliche Mengen: `Set`

Abstrakte Datentypen

Ein abstrakter Datentyp besteht aus
einem Typ und Operationen darauf.

- Beispiele:
  - geordnete Bäume, mit leerer Baum, einfügen, löschen, suchen;
  - Speicher, mit Operationen lesen und schreiben;
  - Stapel, mit Operationen `push`, `pop`, `top`;
  - Schlangen, mit Operationen einreihen, Kopf, nächstes Element;
- Repräsentation des Typen versteckt.

Module in Haskell

- Einschränkung der Sichtbarkeit durch Verkapselung
- Modul: Kleinste verkapselbare Einheit
- Ein Modul umfaßt:
  - Definitionen von Typen, Funktionen, Klassen
  - Deklaration der nach außen sichtbaren Definitionen
- Syntax:

  `module` *Name* `(`*sichtbare Bezeichner*`)` `where` *Rumpf*

  - *sichtbare Bezeichner* können leer sein
  - Gleichzeitig: Übersetzungseinheit (getrennte Übersetzung)

Beispiel: ein einfacher Speicher (`Store`)

- Typ `Store a b`, parametrisiert über
  - Indextyp (muß Gleichheit, oder besser Ordnung, zulassen)
  - Wertyp
- Konstruktor: leerer Speicher `initial :: Store a b`
- Wert lesen: `value :: Store a b-> a-> Maybe b`
  - Möglicherweise undefiniert.
- Wert schreiben:
  `update :: Store a b-> a -> b-> Store a b`

Moduldeklaration

- Moduldeklaration

```
module Store(
    Store,
    initial, -- Store a b
    value,   -- Store a b-> a-> Maybe b
    update,  -- Store a b-> a-> b-> Store a b
    ) where
```

- Signaturen nicht nötig, aber sehr hilfreich.

Erste Implementation

- Speicher als Liste von Paaren (NB. `data`, nicht `type`)

```
data Store a b = St [(a, b)]
```

- Leerer Speicher: leere Liste

```
initial  = St []
```

- Lookup (Neu: `case` für Fallunterscheidungen):

```
value (St ls) a = case filter ((a ==).fst) ls of
                    (_, x):_ -> Just x
                    []       -> Nothing
```

- Update: neues Paar vorne anhängen slides-7-1.tex

```
update (St ls) a b  = St ((a, b): ls)
```

Zweite Implementation

- Speicher als Funktion

```
data Store a b = St (a-> Maybe b)
```

- Leerer Speicher: konstant undefiniert

```
initial  = St (const Nothing)
```

- Lookup: Funktion anwenden

```
value (St f) a  = f a
```

- Update: punktweise Funktionsdefinition

```
update (St f) a b
  = St (\x-> if x== a then Just b else f x)
```

Ein Interface, zwei mögliche Implementierungen.

Export von Datentypen

- `Store(..)` exportiert Konstruktoren
  - Implementation sichtbar
  - Pattern matching möglich
- `Store` exportiert nur den Typ
  - Implemtation nicht sichtbar
  - Kein pattern matching möglich
- Typsynonyme immer sichtbar
- Kritik Haskell:
  - Exportsignatur nicht im Kopf (nur als Kommentar)
  - Exportsignatur nicht von Implementation zu trennen (gleiche Datei!)

Benutzung eines ADTs — Import.

`import [qualified]` *Name* `[hiding]` (*Bezeichner*)

- Ohne Bezeichner wird alles importiert
- `qualified`: qualifizierte Namen

```
import Store2 qualified
f = Store2.initial
```

- `hiding`: Liste der Bezeichner wird versteckt

```
import Prelude hiding (foldr)
foldr f e ls = ...
```

- Mit `qualified` und `hiding` Namenskonflikte auflösen.

Schnittstelle vs. Semantik

- Stacks
  - Typ: `St a`
  - Initialwert:
    ```
    empty :: St a
    ```
  - Wert ein/auslesen
    ```
    push :: a-> St a-> St a
    top  :: St a-> a
    pop  :: St a-> St a
    ```
  - Test auf Leer
    ```
    isEmpty :: St a-> Bool
    ```
  - Last in, first out.
- Queues
  - Typ: `Qu a`
  - Initialwert:
    ```
    empty :: Qu a
    ```
  - Wert ein/auslesen
    ```
    enq   :: a-> Qu a-> Qu a
    first :: Qu a-> a
    deq   :: Qu a-> Qu a
    ```
  - Test auf Leer
    ```
    isEmpty :: Qu a-> Bool
    ```
  - First in, first out.
- Gleiche Signatur, unterscheidliche Semantik.

Implementation von `Stack`: Liste

- Sehr einfach wg. last in, first out
- `empty` ist `[]`
- `push` ist `(:)`
- `top` ist `head`
- `pop` ist `tail`
- `isEmpty` ist `null`
- Zeigen?

Implementation von `Queue`

- Mit einer Liste?
  - Problem: am Ende anfügen oder abnehmen ist teuer.
- Deshalb zwei Listen:
  - Erste Liste: zu entnehmende Elemente
  - Zweite Liste: hinzugefügte Elemente rückwärts
  - Invariante: erste Liste leer gdw. Queue leer

- Beispiel:

Operation	Queue	Repräsentation
`empty`		([], [])
`enq 9`	9	([9], [])
`enq 4`	$4 \rightarrow 9$	([9], [4])
`deq`	4	([4], [])
`enq 7`	$7 \rightarrow 4$	([4], [7])
`enq 5`	$5 \rightarrow 7 \rightarrow 4$	([4], [5, 7])
`deq`	$5 \rightarrow 7$	([7, 5], [])
`deq`	7	([5], [])
`deq`		([], [])

- ```
  module Queue(Qu, empty, isEmpty,
               enq, first, deq) where
  ```

  ```
  data Qu a = Qu [a] [a]
  empty = Qu [] []
  ```

- Invariante: erste Liste leer gdw. Queue leer

  ```
  isEmpty (Qu xs _) = null xs
  ```

- Erstes Element steht vorne in erster Liste

  ```
  first (Qu [] _)  = error "Qu: first of mt Q"
  first (Qu (x:xs) _) = x
  ```
  ```

- Bei `enq` und `deq` Invariante prüfen

```
enq x (Qu xs ys) = check xs (x:ys)

deq (Qu [] _ )      = error "Qu: deq of mt Q"
deq (Qu (_:xs) ys) = check xs ys
```

- `check` prüft die Invariante

```
check [] ys = Qu (reverse ys) []
check xs ys = Qu xs ys
```

Endliche Mengen

- Eine endliche Menge ist Sammlung von Elementen so dass
  - kein Element doppelt ist, und
  - die Elemente nicht angeordnet sind.
- Operationen:
  - leere Menge und Test auf leer,
  - Element einfügen,
  - Element löschen,
  - Test auf Enthaltensein,
  - Elemente aufzählen.

Endliche Mengen — Schnittstelle

- Typ `Set a`
  - Typ `a` mit Gleichheit, besser Ordnung.

```
module Set (Set,
  empty,    -- Set a
  isEmpty,  -- Set a-> Bool
  insert,   -- Ord a=> Set a-> a-> Set a
  remove,   -- Ord a=> Set a-> a-> Set a
  elem,     -- Ord a=> a-> Set a-> Bool
  enum      -- Ord a=> Set a-> [a]
  ) where
```

Endliche Mengen — Implementation

- Implementation durch balancierte Bäume
  - AVL-Bäume =

```
type Set a = AVLTree a
```

- Ein Baum ist ausgeglichen, wenn
  - alle Unterbäume ausgeglichen sind, und
  - der Höhenunterschied zwischen zwei Unterbäumen höchstens eins beträgt.

- Im Knoten Höhe des Baumes an dieser Stelle

```
data AVLTree a = Null
               | Node Int
                      (AVLTree a)
                      a
                      (AVLTree a)
```

- Ausgeglichenheit ist Invariante.
- Alle Operationen müssen Ausgeglichenheit bewahren.
- Bei Einfügen und Löschen ggf. rotieren.

Simple Things First

- Leere Menge = leerer Baum

```
empty :: AVLTree a
empty = Null
```

- Test auf leere Menge:

```
isEmpty :: AVLTree a-> Bool
isEmpty Null = True
isEmpty _    = False
```

Hilfsfunktionen

- Höhe eines Baums
  - Aus Knoten selektieren, nicht berechnen.

```
ht :: AVLTree a-> Int
ht Null              = 0
ht (Node h _ _ _) = h
```

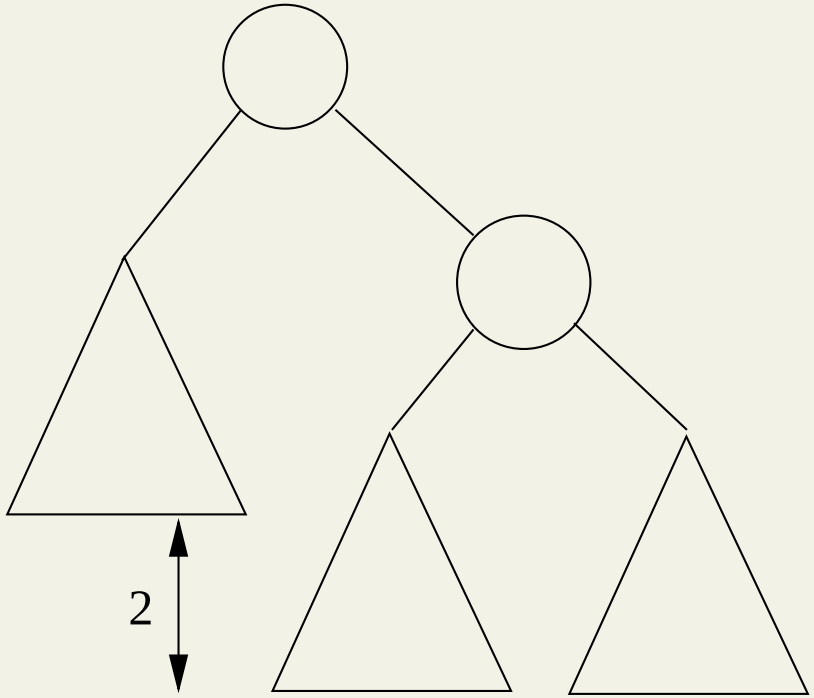
- Neuen Knoten anlegen, Höhe aus Unterbäumen berechnen.

```
mkNode :: AVLTree a-> a-> AVLTree a-> AVLTree a
mkNode l n r = Node h l n r where
                  h = 1+ max (ht l) (ht r)
```

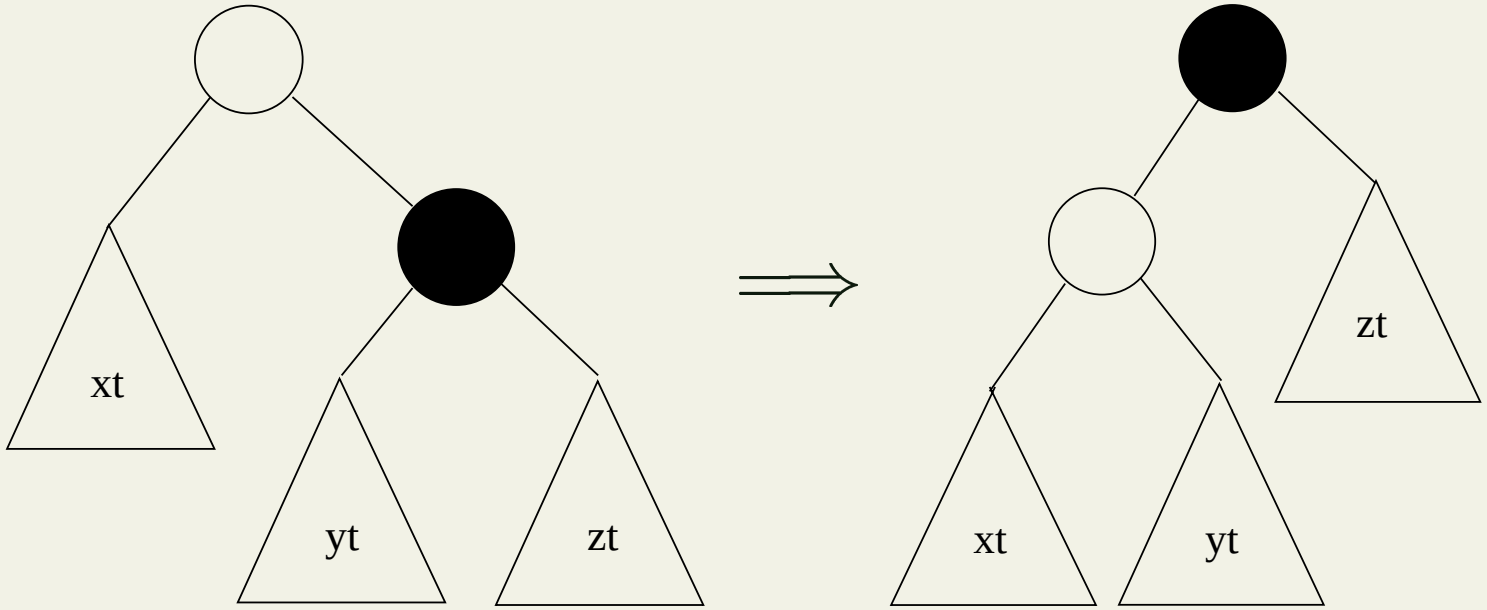
Ausgeglichenheit sicherstellen

- Problem:
  Nach Löschen oder
  Einfügen zu großer
  Höhenunterschied

- Lösung:
  Rotieren der Unterbäume

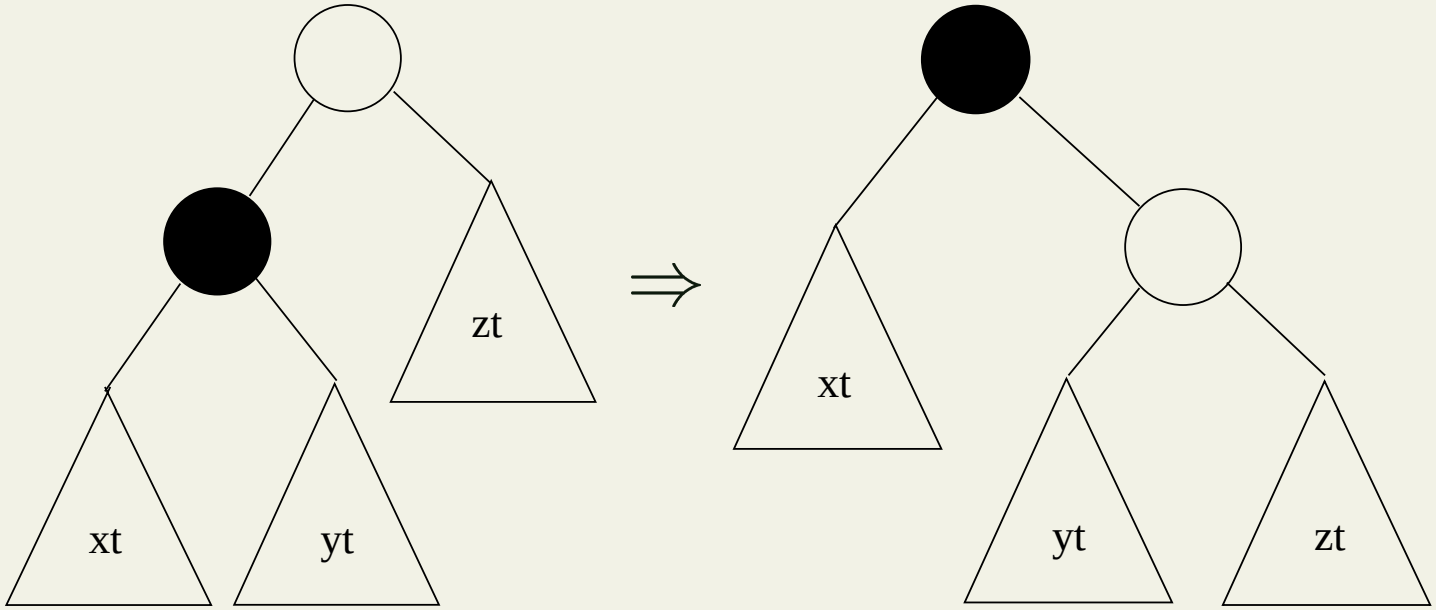


Linksrotation




```
rotl :: AVLTree a-> AVLTree a
rotl (Node _ xt y (Node _ yt x zt)) =
  mkNode (mkNode xt y yt) x zt
```

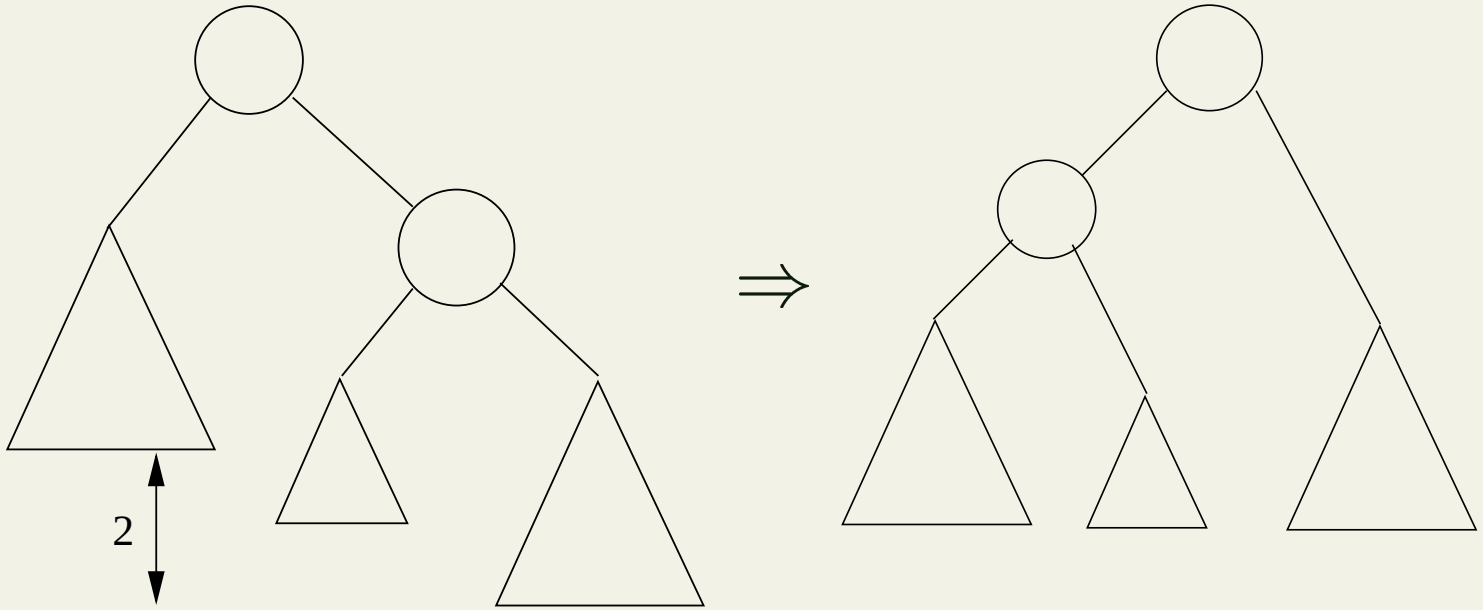
Rechtsrotation




```
rotr :: AVLTree a-> AVLTree a
rotr (Node _ (Node _ ut y vt) x rt) =
  mkNode ut y (mkNode vt x rt)
```

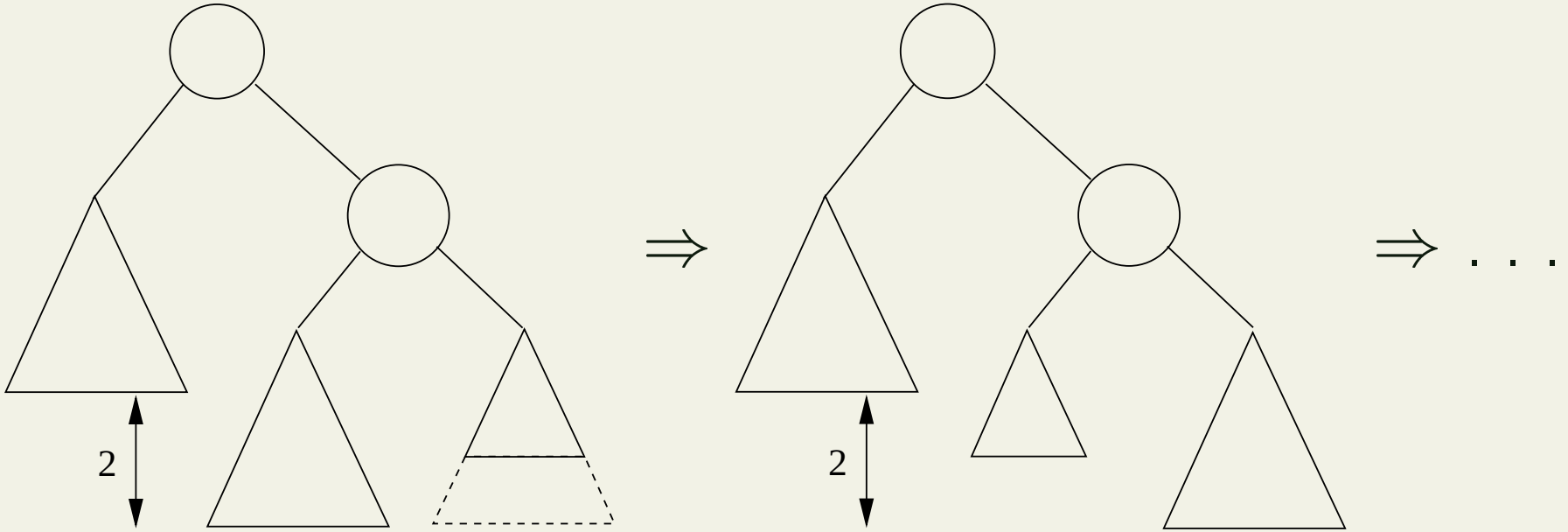
Ausgeglichenheit sicherstellen

- Fall 1: Äußerer Unterbaum zu hoch
- Lösung: Linksrotation



Ausgeglichenheit sicherstellen

- Fall 2: Innerer Unterbaum zu hoch oder gleich hoch
- Reduktion auf vorherigen Fall durch Rechtsrotation des Unterbaumes



Ausgeglichenheit sicherstellen

- Hilfsfunktion: Balance eines Baumes

```
bias :: AVLTree a-> Int
bias (Node _ lt _ rt) = ht lt - ht rt
```

- Unterscheidung der Fälle
  - Fall 1: `bias` < 0
  - Fall 2: `bias` ≥ 0
- Symmetrischer Fall (linker Teilbaum zu hoch)
  - Fall 1: `bias` > 0
  - Fall 2: `bias` ≤ 0

- `mkAVL xt y zt`:
  - Voraussetzung: Höhenunterschied `xt`, `zt` höchstens zwei;
  - Konstruiert neuen AVL-Baum mit Knoten `y`.

```
mkAVL :: AVLTree a-> a-> AVLTree a-> AVLTree a
mkAVL xt y zt
   | hx+1< hz &&
     0<= bias zt = rotl (mkNode xt y (rotr zt))
   | hx+1< hz    = rotl (mkNode xt y zt)
   | hz+1< hx &&
     bias xt<= 0 = rotr (mkNode (rotl xt) y zt)
   | hz+1< hx    = rotr (mkNode xt y zt)
   | otherwise   = mkNode xt y zt
     where hx= ht xt; hz= ht zt
```

Ordnungserhaltendes Einfügen

- Erst Knoten einfügen, dann ggf. rotieren:

```
insert :: Ord a=> AVLTree a-> a-> AVLTree a
insert Null a = mkNode Null a Null
insert (Node n l a r) b
   | b < a  = mkAVL (insert l b) a r
   | b == a = Node n l a r
   | b > a  = mkAVL l a (insert r b)
```

- `mkAVL` garantiert Ausgeglichenheit.

Löschen

- Erst Knoten löschen, dann ggf. rotieren:

```
remove :: Ord a=> AVLTree a-> a-> AVLTree a
remove Null x = Null
remove (Node h l y r) x
   | x < y  = mkAVL (remove l x) y r
   | x == y = join l r
   | x > y  = mkAVL l y (remove r x)
```

- `mkAVL` garantiert Ausgeglichenheit.

- `join` fügt zwei Bäume ordnungserhaltend zusammen (s. letzte VL)

```
join ::  AVLTree a-> AVLTree a-> AVLTree a
join xt Null = xt
join xt yt   = mkAVL xt u nu where
  (u, nu) = splitTree yt
  splitTree :: AVLTree a-> (a, AVLTree a)
  splitTree (Node h Null a t) = (a, t)
  splitTree (Node h lt a rt) =
    (u, mkAVL nu a rt) where
       (u, nu) = splitTree lt
```

Menge aufzählen

```
foldT :: (a-> b-> b-> b)-> b-> AVLTree a-> b
foldT f e Null = e
foldT f e (Node _ l a r) =
   f a (foldT f e l) (foldT f e r)
```

- Aufzählen der Menge: Inorder-Traversion (via `fold`)

  ```
  enum :: Ord a=> AVLTree a-> [a]
  enum = foldT (\x t1 t2-> t1++ [x]++ t2) []
  ```

- Enthaltensein: Testen.

  ```
  elem :: Ord a=> a-> AVLTree a-> Bool
  elem e = foldT (\x b1 b2-> e == x || b1 || b2) Fal
  ```

Zusammenfassung

- Abstrakter Datentyp: Datentyp plus Operationen.
- Module in Haskell:
  - Module begrenzen Sichtbarkeit
  - Importieren, ggf. qualifiziert oder nur Teile
- Beispiele für ADTs:
  - Steicher: mehrere Implementationen
  - Stapel und Schlangen: gleiche Signatur, andere Semantik
  - Implementation von Schlangen durch zwei Listen
  - Endliche Mengen: Implementation durch ausgeglichene Bäume