Vorlesung vom 18.11.2001: Funktionen Höherer Ordnung Typklassen

Inhalt

- Funktionen höherer Ordnung
  - Letzte VL: verallgemeinerte Berechnungsmuster (`map`, `filter`, `foldr`, . . .)
  - Heute: Konstruktion neuer Funktionen aus alten
- Nützliche Techniken:
  - Anonyme Funktionen
  - Partielle Applikation
  - η-Kontraktion
- Längeres Beispiel: Erstellung eines Index
- Typklassen: Überladen von Funktionen

Funktionen als Werte

- Zusammensetzen neuer Funktionen aus alten.
- Zweimal hintereinander anwenden:

```
twice :: (a-> a)-> (a-> a)
twice f x = f (f x)
```

- n-mal hintereinander anwenden:

```
iter :: Int-> (a-> a)-> a-> a
iter 0 f x = x
iter n f x | n > 0 = f (iter (n-1) f x)
           | otherwise = x
```

- Funktionskomposition:

```
(.) :: (b-> c) -> (a-> b)-> a-> c
(f . g) x = f (g x)
```

  - `f` nach `g`.

- Funktionskomposition vorwärts:

```
(>.>) :: (a-> b)-> (b-> c)-> a-> c
(f >.> g) x = g (f x)
```

  - Nicht vordefiniert!

- Identität:

```
id :: a-> a
id x = x
```

  - Nützlicher als man denkt.

Anonyme Funktionen

- Nicht jede Funktion muß einen Namen haben.
- Beispiel:

```
ins x xs = lessx ++ [x] ++ grteqx where
  (lessx, grteqx) = span less xs
  less z = z < x
```

- Besser: statt `less` anonyome Funktion

```
ins' x xs = lessx ++ [x] ++ grteqx where
  (lessx, grteqx) = span (\z-> z < x) xs
```

  - `\x-> E` $=$ `f where f x= E`
  - Auch pattern matching möglich

Beispiel: Primzahlen

- Sieb des Erathostenes
  - Für jede gefundene Primzahl `p` alle Vielfachen heraussieben
  - Dazu: filtern mit `(\n-> n `mod` p /= 0)`

```
sieve :: [Integer]-> [Integer]
sieve []       = []
sieve (p:ps) =
  p:(sieve (filter (\n-> n `mod` p /= 0) ps))
```

- Primzahlen im Intervall `[1..n]`

```
primes :: Integer-> [Integer]
primes n = sieve [2..n]
```

η-Kontraktion

- Nützliche vordefinierte Funktionen:
  - Disjunktion/Konjunktion von Prädikaten über Listen

```
all, any :: (a-> Bool)-> [a]-> Bool
any p       = or  . map p
all p       = and . map p
```

- Da fehlt doch was?!
- η-Kontraktion:
  - Allgemein: `\x-> E x` ⇔ `E`
  - Bei Funktionsdefinition: `f x = E x` ⇔ `f = E`
  - Hier: Definition äquivalent zu `any p x = or (map p x)`

Partielle Applikation

- Funktionen können partiell angewandt werden:

```
double :: String-> String
double = concat . map (replicate 2)
```

  - Zur Erinnerung: `replicate :: Int-> a-> [a]`

Die Kürzungsregel bei Funktionsapplikation

Bei Anwendung der Funktion

$$\texttt{f :: t}_1 \texttt{ -> t}_2 \texttt{ -> ... -> t}_n \texttt{-> t}$$

auf k Argumente mit $k \leq n$

$$\texttt{e}_1 \texttt{ :: t}_1\texttt{, e}_2 \texttt{ :: t}_2\texttt{, ..., e}_k \texttt{ :: t}_k$$

werden die Typen der Argumente gekürzt:

$$\texttt{f :: } \cancel{\texttt{t}}_1 \texttt{ -> } \cancel{\texttt{t}}_2 \texttt{ -> ... -> } \cancel{\texttt{t}}_k \texttt{ -> t}_{k+1} \texttt{ -> ...-> t}_n \texttt{ -> t}$$

$$\texttt{f e}_1 \texttt{ ...e}_k \texttt{ :: t}_{k+1} \texttt{ -> ...-> t}_n \texttt{ -> t}$$

- Partielle Anwendung von Operatoren:

```
elem :: Int-> [Int]-> Bool
elem x = any (== x)
```

  - `(== x)` Sektion des Operators `==` (entspricht `\e-> e == x`)

Gewürzte Tupel: Curry

- Unterschied zwischen

  `f :: a-> b-> c` und `f :: (a, b)-> c` ?

  - Links partielle Anwendung möglich.
  - Ansonsten äquivalent.

- Konversion:
  - Rechts nach links:

```
curry   :: ((a, b)-> c)-> a-> b-> c
curry f a b = f (a, b)
```

  - Links nach rechts:

```
uncurry :: (a-> b-> c)-> (a, b)-> c
uncurry f (a, b) = f a b
```

Beispiel: Der Index

- Problem:
  - Gegeben ein Text

    `brösel fasel\nbrösel brösel\nfasel brösel blubb`

  - Zu erstellen ein Index: für jedes Wort Liste der Zeilen, in der es auftritt

    `brösel [1, 2, 3]` `blubb [3]` `fasel [1, 3]`

- Spezifikation der Lösung

```
type Doc = String
type Word= String
makeIndex :: Doc-> [([Int], Word)]
```

- Zerlegung des Problems in einzelne Schritte — Ergebnistyp
  (a) Text in Zeilen aufspalten: `[Line]`
  (mit `type Line= String`)
  (b) Jede Zeile mit ihrer Nummer versehen: `[(Int, Line)]`
  (c) Zeilen in Worte spalten (Zeilennummer beibehalten): `[(Int, Word)]`
  (d) Liste alphabetisch nach Worten sortieren: `[(Int, Word)]`
  (e) Gleiche Worte in unerschiedlichen Zeilen zusammenfassen: `[([Int], Word)]`
  (f) Alle Worte mit weniger als vier Buchstaben entfernen: `[([Int], Word)]`

- Erste Implementierung:

```
type Line = String
makeIndex =
   lines       >.> -- Doc -> [Line]
   numLines    >.> --     -> [(Int,Line)]
   allNumWords >.> --     -> [(Int,Word)]
   sortLs      >.> --     -> [(Int,Word)]
   makeLists   >.> --     -> [([Int],Word)]
   amalgamate  >.> --     -> [([Int],Word)]
   shorten         --     -> [([Int],Word)]
```

- Implementierung der einzelnen Komponenten:
  - In Zeilen zerlegen:

    `lines :: String-> [String]` aus dem Prelude
  - Jede Zeile mit ihrer Nummer versehen:

    ```
    numLines :: [Line]-> [(Int, Line)]
    numLines lines = zip [1.. length lines] lines
    ```
  - Jede Zeile in Worte zerlegen:

    Pro Zeile: `words:: String-> [String]` aus dem Prelude.

    ▷ Berücksichtigt nur Leerzeichen.

    ▷ Vorher alle Satzzeichen durch Leerzeichen ersetzen.

```
splitWords :: Line-> [Word]
splitWords = words . map (\c-> if isPunct c then ' '
                                 else c) where
   isPunct :: Char-> Bool
   isPunct c = c `elem` ";:.,\'\"!?(){}-\\[]"
```

Auf alle Zeilen anwenden, Ergebnisliste flachklopfen.

```
allNumWords :: [(Int, Line)]-> [(Int, Word)]
allNumWords = concat . map oneLine where
   oneLine :: (Int, Line)-> [(Int, Word)]
   oneLine (num, line) = map (\w-> (num, w))
                             (splitWords line)
```

- Liste alphabetisch nach Worten sortieren:

  Ordnungsrelation definieren:

```
ordWord :: (Int, Word)-> (Int, Word)-> Bool
ordWord (n1, w1) (n2, w2) =
  w1 < w2 || (w1 == w2 && n1 <= n2)
```

  Generische Sortierfunktion `qsortBy`

```
sortLs :: [(Int, Word)]-> [(Int, Word)]
sortLs = qsortBy ordWord
```

- Gleiche Worte in unterschiedlichen Zeilen zusammenfassen:

  Erster Schritt: Jede Zeile zu (einelementiger) Liste von Zeilen.

```
makeLists :: [(Int, Word)]-> [([Int], Word)]
makeLists = map (\ (l, w)-> ([l], w))
```

Zweiter Schritt: Gleiche Worte zusammenfassen.

▷ Nach Sortierung sind gleiche Worte hintereinander!

```
amalgamate :: [([Int], Word)]-> [([Int],Word)]
amalgamate []  = []
amalgamate [p] = [p]
amalgamate ((l1, w1):(l2, w2):rest)
  | w1 == w2  = amalgamate ((l1++ l2, w1):rest)
  | otherwise = (l1, w1):amalgamate ((l2, w2):rest)
```

- Alle Worte mit weniger als vier Buchstaben entfernen:

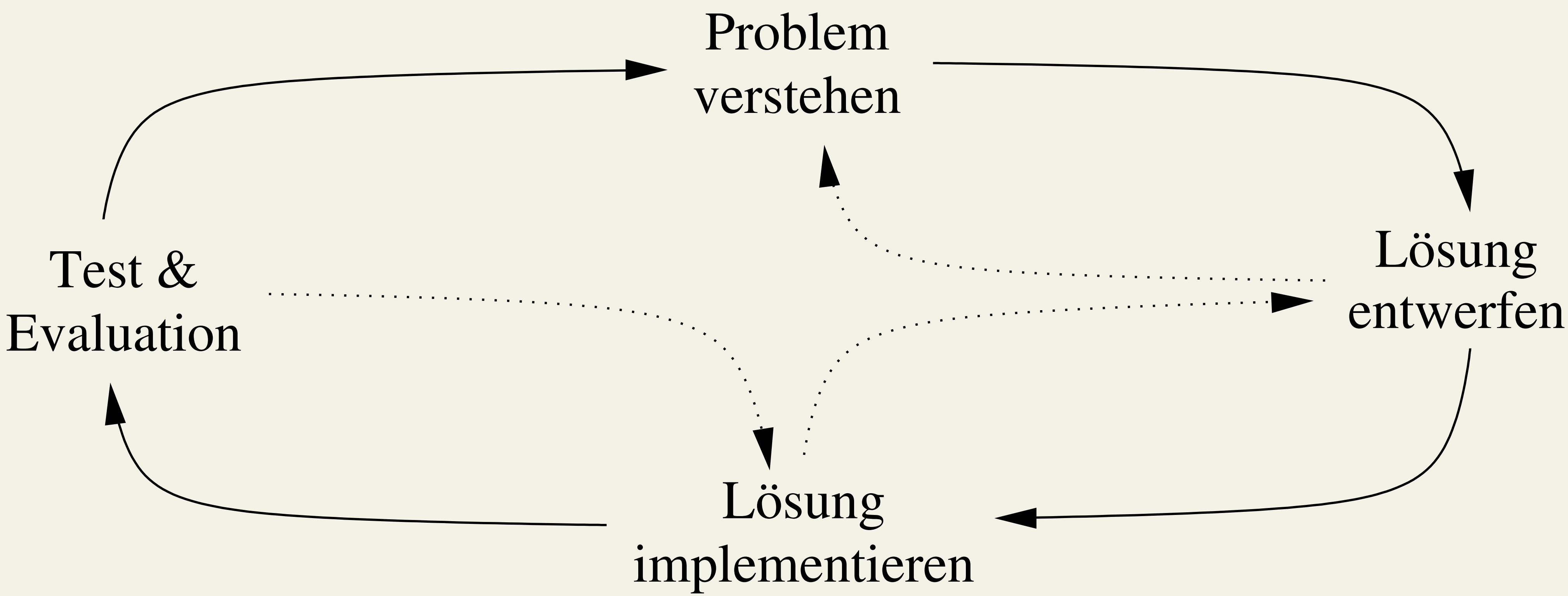
```
shorten :: [([Int],Word)] -> [([Int],Word)]
shorten = filter (\ (_, wd)-> length wd >= 4)
```

Alternative Definition:

```
shorten = filter ((>= 4) . length . snd)
```

- Testen.

Der Programmentwicklungszyklus



Typklassen

- Allgemeinerer Typ für `elem`:

  `elem :: a-> [a]-> Bool`

  zu allgemein wegen `c ==`
  - `(==)` kann nicht für alle Typen definiert werden:
  - z.B. `(==) :: (Int-> Int)-> (Int-> Int)-> Bool` ist nicht entscheidbar.
- Lösung: `Typklassen`

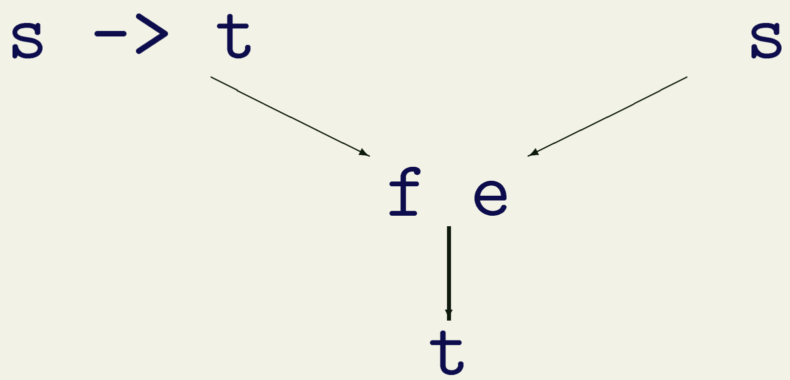
  ```
  elem :: Eq a=> a-> [a]-> Bool
  elem c = any (c ==)
  ```
  - Für `a` kann jeder Typ eingesetzt werden, für den `(==)` definiert ist.

- `Eq a` ist eine Klasseneinschränkung (*class constraint*)

- Standard-Typklassen:
  - `Eq a` für `== :: a-> a-> Bool` (Gleichheit)
  - `Ord a` für `<= :: a-> a-> Bool` (Ordnung)
    - ▷ Alle Basisdatentypen
    - ▷ Listen, Tupel
    - ▷ Nicht für Funktionsräume
  - `Show a` für `show :: a-> String`
    - ▷ Alle Basisdatentypen
    - ▷ Listen, Tupel
    - ▷ Nicht für Funktionsräume
  - `Read a` für `read :: String-> a`
    - ▷ Siehe `Show`

Typüberprüfung

- Ausdrücke in Haskell: Anwendung von Funktionen
- Deshalb Kern der Typüberprüfung: Funktionsanwendung



- Einfach solange Typen monomorph
  - d.h. keine freien Typvariablen
  - Was passiert bei polymorphen Ausdrücken?

Polymorphe Typüberprüfung

- Bei polymorphen Funktionen: Unifikation.
- Beispiel:

```
f(x,y) = (x, ['a'      ..      y])

               Char

                              Char

                       [Char]

           a

               (a, [Char])

f :: (a, Char)-> (a, [Char])
```

- Zweites Beispiel:

```
g(m, zs)  =  m    +    length    zs

                      [b]-> Int
                                 [b]
                           Int
            Int
                 Int

g :: (Int, [b])-> Int
```

- Drittes Beispiel:

```
h = g . f
```

  - `(.) ::(y-> z)-> (x-> y)-> x-> z`
  - `g :: (Int, [b])-> Int`
  - `f :: (a, Char)-> (a, [Char])`

- Hier Unifikation von `(a, [Char])` und `(Int, [b])` zu

```
(Int, [Char]
```

- Damit

```
h :: (Int, [Char])-> Int
```

Typunifikation

- Allgemeinste Instanz zweier Typausdrücke `s` und `t`
  - Kann undefiniert sein.
- Berechnung rekursiv:
  - Wenn beides Listen, Berechnung der Instanz der Listenelememente;
  - Wenn beides Tupel, Berechnung der Instanzen der Tupel;
  - Wenn eines Typvariable, zu anderem Ausdruck instanziieren;
  - Wenn beide unterschiedlich, undefiniert;
  - Dabei Vereinigung der Typeinschränkungen
- Anschaulich: Schnittmenge der Instanzen.

Zusammenfassung

- Funktionen als Werte
- Anonyme Funktionen: `\x-> E`
- η-Kontraktion: `f x = E x` $\Rightarrow$ `f` $=$ `E`
- Partielle Applikation und Kürzungsregel
- Indexbeispiel:
  - Dekomposition in Teilfunktionen
  - Gesamtlösung durch Hintereinanderschalten der Teillösungen
- Typklassen erlauben überladene Funktionen.
- Typüberprüfung