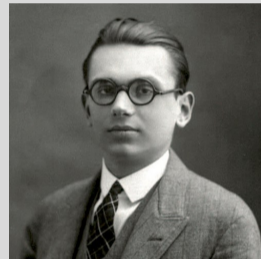


Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 8 vom 29.04.26

Natürliches Schließen II

Sommersemester 2026



Serge Autexier, Christoph Lüth

# Regeln des natürlichen Schließens

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow I$$

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} mp$$

$$\frac{}{\perp} false$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg A] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A} raa$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \neg I$$

$$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg E$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I_L$$

$$\frac{B}{A \vee B} \vee I_R$$

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee E$$

# Regeln des natürlichen Schließens

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow I$$

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} mp$$

$$\frac{\perp}{A} \text{ false}$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg A] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A} \text{ raa}$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \neg I$$

$$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg E$$

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I_L$$

$$\frac{B}{A \vee B} \vee I_R$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \quad [B] \\ \vdots \quad \vdots \\ A \vee B \quad C \quad C \end{array}}{C} \vee E$$

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B} \leftrightarrow I$$

$$\frac{A \quad A \leftrightarrow B}{B} \leftrightarrow E_L$$

$$\frac{B \quad A \leftrightarrow B}{A} \leftrightarrow E_R$$

## Beispiel

► Zeige  $(A \wedge B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow (B \longrightarrow C))$ .

## Beispiel

► Zeige  $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ .

► Beweis:

$$\frac{\frac{\frac{[A]^2 \quad [B]^3}{A \wedge B} \wedge I \quad [A \wedge B \rightarrow C]^1}{C} mp}{\frac{B \rightarrow C \rightarrow^3}{A \rightarrow (B \rightarrow C)} \rightarrow I^2} \rightarrow I^1 \quad (1)$$

## Beispiel

► Zeige  $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ .

► Beweis:

$$\frac{\frac{\frac{[A]^2 \quad [B]^3}{A \wedge B} \wedge I \quad [A \wedge B \rightarrow C]^1}{C} mp}{\frac{B \rightarrow C \rightarrow^3}{A \rightarrow (B \rightarrow C)} \rightarrow I^2} \rightarrow I^1 \quad (1)$$

► Umständlich für Übungsaufgaben in Textdateien

# Lineare Notation für ND Beweise

► ASCII Namen für Regeln:

$\longrightarrow I$	impI	$\wedge I$	conjI	$\neg I$	notI	$\vee I_L$	disjIL	$\longleftrightarrow I$	iffI
$mp$	mp	$\wedge E_L$	conjEL	$\neg E$	notE	$\vee I_R$	disjIR	$\longleftrightarrow E_L$	iffEL
$false$	false	$\wedge E_R$	conjER			$\vee E$	disjE	$\longleftrightarrow E_R$	iffER
$raa$	raa								

# Lineare Notation für ND Beweise

- ▶ ASCII Namen für Regeln:

$\rightarrow I$	impI	$\wedge I$	conjI	$\neg I$	notI	$\vee I_L$	disjIL	$\longleftrightarrow I$	iffI
<i>mp</i>	mp	$\wedge E_L$	conjEL	$\neg E$	notE	$\vee I_R$	disjIR	$\longleftrightarrow E_L$	iffEL
<i>false</i>	false	$\wedge E_R$	conjER			$\vee E$	disjE	$\longleftrightarrow E_R$	iffER
<i>raa</i>	raa								

- ▶ Beweis von eben in linearer Notation

```
8: [A] b
7: [B] c
6: A & B          | conjI (7, 8)
5: [A & B --> C] a
4: C              | mp (5, 6)
3: B--> C         | impI (4) [c]
2: A--> (B--> C) | impI (3) [b]
1: (A & B --> C)--> (A--> (B--> C)) | impI (2) [a]
```

# Lineare Notation für ND Beweise

- ▶ ASCII Namen für Regeln:

$\rightarrow I$	impI	$\wedge I$	conjI	$\neg I$	notI	$\vee I_L$	disjIL	$\longleftrightarrow I$	iffI
<i>mp</i>	mp	$\wedge E_L$	conjEL	$\neg E$	notE	$\vee I_R$	disjIR	$\longleftrightarrow E_L$	iffEL
<i>false</i>	false	$\wedge E_R$	conjER			$\vee E$	disjE	$\longleftrightarrow E_R$	iffER
<i>raa</i>	raa								

- ▶ Beweis von eben in linearer Notation in umgekehrter Reihenfolge

```
1: (A & B --> C)--> (A--> (B--> C)) | impI (2) [a]
2: A--> (B--> C) | impI (3) [b]
3: B--> C | impI (4) [c]
4: C | mp (5, 6)
5: [A & B --> C] a
6: A & B | conjI (7, 8)
7: [B] c
8: [A] b
```

# Beispiel

► Gegeben

$$\Gamma = \{X \vee Y, \neg B \longrightarrow \neg X, Y \longrightarrow B, B \longrightarrow D, D \longrightarrow C\}$$

► Zeige  $\Gamma \vdash C$ .

# Beispiel

- ▶ Gegeben

$$\Gamma = \{X \vee Y, \neg B \longrightarrow \neg X, Y \longrightarrow B, B \longrightarrow D, D \longrightarrow C\}$$

- ▶ Zeige  $\Gamma \vdash C$ . ... in linearer Schreibweise
- ▶ Hinweis: Die Anzahl der Regelanwendungen und die Anzahl der dabei eingeführten Prämisseen sowie die Anzahl der Annahmen gibt einen Hinweis über die maximale Anzahl an Zeilennummern, die man brauchen wird.

# Jetzt seid ihr dran!

Leitet folgendes Theorem her:

$$\vdash (A \longrightarrow B) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C)) \quad (2)$$

$\frac{[A] \quad \vdots \quad B}{A \longrightarrow B} \longrightarrow I$	$\frac{[\neg A] \quad \vdots \quad \perp}{A} \text{ raa}$	$\frac{[A] \quad \vdots \quad \perp}{\neg A} \neg I$	$\frac{A \vee B \quad C \quad C}{C} \vee E$	
$\frac{A \quad A \longrightarrow B}{B} \text{ mp}$	$\frac{\perp}{A} \text{ false}$	$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$	$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L$	$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$
$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg E$	$\frac{A}{A \vee B} \vee I_L$	$\frac{B}{A \vee B} \vee I_R$		
$\frac{A \longrightarrow B \quad B \longrightarrow A}{A \longleftrightarrow B} \longleftrightarrow I$	$\frac{A \quad A \longleftrightarrow B}{B} \longleftrightarrow E_L$	$\frac{B \quad A \longleftrightarrow B}{A} \longleftrightarrow E_R$		

# Jetzt seid ihr dran!

Leitet folgendes Theorem her:

$$\vdash (A \longrightarrow B) \wedge \neg B \longrightarrow \neg A \quad (2)$$

$\frac{[A] \quad \vdots \quad B}{A \longrightarrow B} \longrightarrow I$	$\frac{[\neg A] \quad \vdots \quad \perp}{A} \text{ } raa$	$\frac{[A] \quad \vdots \quad \perp}{\neg A} \neg I$	$\frac{A \vee B \quad C \quad C}{C} \vee E$	
$\frac{A \quad A \longrightarrow B}{B} mp$	$\frac{\perp}{A} \text{ } false$	$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$	$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L$	$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$
$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg E$	$\frac{A}{A \vee B} \vee I_L$	$\frac{B}{A \vee B} \vee I_R$		
$\frac{A \longrightarrow B \quad B \longrightarrow A}{A \longleftrightarrow B} \longleftrightarrow I$	$\frac{A \quad A \longleftrightarrow B}{B} \longleftrightarrow E_L$	$\frac{B \quad A \longleftrightarrow B}{A} \longleftrightarrow E_R$		

# Jetzt seid ihr dran!

Leitet folgendes Theorem her:

$$\vdash ((A \longrightarrow B) \wedge \neg B) \longrightarrow \neg A \quad (2)$$

$\frac{[A] \quad \vdots \quad B}{A \longrightarrow B} \longrightarrow I$	$\frac{[\neg A] \quad \vdots \quad \perp}{A} \text{ raa}$	$\frac{[A] \quad \vdots \quad \perp}{\neg A} \neg I$	$\frac{A \vee B \quad C \quad C}{C} \vee E$	
$\frac{A \quad A \longrightarrow B}{B} \text{ mp}$	$\frac{\perp}{A} \text{ false}$	$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$	$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L$	$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$
$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg E$	$\frac{A}{A \vee B} \vee I_L$	$\frac{B}{A \vee B} \vee I_R$		
$\frac{A \longrightarrow B \quad B \longrightarrow A}{A \longleftrightarrow B} \longleftrightarrow I$	$\frac{A \quad A \longleftrightarrow B}{B} \longleftrightarrow E_L$	$\frac{B \quad A \longleftrightarrow B}{A} \longleftrightarrow E_R$		

# Jetzt seid ihr dran!

Leitet folgendes Theorem her:

$$\vdash A \longrightarrow (B \longrightarrow A) \quad (2)$$

$\frac{[A] \quad \vdots \quad B}{A \longrightarrow B} \longrightarrow I$	$\frac{[\neg A] \quad \vdots \quad \perp}{A} \text{ raa}$	$\frac{[A] \quad \vdots \quad \perp}{\neg A} \neg I$	$\frac{A \vee B \quad C \quad C}{C} \vee E$	
$\frac{A \quad A \longrightarrow B}{B} \text{ mp}$	$\frac{\perp}{A} \text{ false}$	$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$	$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L$	$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$
$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg E$	$\frac{A}{A \vee B} \vee I_L$	$\frac{B}{A \vee B} \vee I_R$		
$\frac{A \longrightarrow B \quad B \longrightarrow A}{A \longleftrightarrow B} \longleftrightarrow I$	$\frac{A \quad A \longleftrightarrow B}{B} \longleftrightarrow E_L$	$\frac{B \quad A \longleftrightarrow B}{A} \longleftrightarrow E_R$		

# Jetzt seid ihr dran!

Leitet folgendes Theorem her:

$$\vdash A \longrightarrow (\neg A \longrightarrow B) \quad (2)$$

$\frac{[A] \quad \vdots \quad B}{A \longrightarrow B} \longrightarrow I$	$\frac{[\neg A] \quad \vdots \quad \perp}{A} \text{ raa}$	$\frac{[A] \quad \vdots \quad \perp}{\neg A} \neg I$	$\frac{A \vee B \quad C \quad C}{C} \vee E$	
$\frac{A \quad A \longrightarrow B}{B} \text{ mp}$	$\frac{\perp}{A} \text{ false}$	$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$	$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L$	$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$
$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg E$	$\frac{A}{A \vee B} \vee I_L$	$\frac{B}{A \vee B} \vee I_R$		
$\frac{A \longrightarrow B \quad B \longrightarrow A}{A \longleftrightarrow B} \longleftrightarrow I$	$\frac{A \quad A \longleftrightarrow B}{B} \longleftrightarrow E_L$	$\frac{B \quad A \longleftrightarrow B}{A} \longleftrightarrow E_R$		

# Jetzt seid ihr dran!

Leitet folgendes Theorem her:

$$\vdash \neg\neg A \leftrightarrow A \quad (2)$$

$\frac{[A] \quad \vdots \quad B}{A \rightarrow B} \rightarrow I$	$\frac{[\neg A] \quad \vdots \quad \perp}{A} \text{ raa}$	$\frac{[A] \quad \vdots \quad \perp}{\neg A} \neg I$	$\frac{A \vee B \quad C \quad C}{C} \vee E$	
$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{ mp}$	$\frac{\perp}{A} \text{ false}$	$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$	$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L$	$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$
$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg E$	$\frac{A}{A \vee B} \vee I_L$	$\frac{B}{A \vee B} \vee I_R$		
$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B} \leftrightarrow I$	$\frac{A \quad A \leftrightarrow B}{B} \leftrightarrow E_L$	$\frac{B \quad A \leftrightarrow B}{A} \leftrightarrow E_R$		

# Jetzt seid ihr dran!

Leitet folgendes Theorem her:

$$\vdash (A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longleftrightarrow (A \wedge B \longrightarrow C) \quad (2)$$

$\frac{[A] \quad \vdots \quad B}{A \longrightarrow B} \longrightarrow I$	$\frac{[\neg A] \quad \vdots \quad \perp}{A} \text{ raa}$	$\frac{[A] \quad \vdots \quad \perp}{\neg A} \neg I$	$\frac{A \vee B \quad C \quad C}{C} \vee E$	
$\frac{A \quad A \longrightarrow B}{B} \text{ mp}$	$\frac{\perp}{A} \text{ false}$	$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$	$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L$	$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$
$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg E$	$\frac{A}{A \vee B} \vee I_L$	$\frac{B}{A \vee B} \vee I_R$		
$\frac{A \longrightarrow B \quad B \longrightarrow A}{A \longleftrightarrow B} \longleftrightarrow I$	$\frac{A \quad A \longleftrightarrow B}{B} \longleftrightarrow E_L$	$\frac{B \quad A \longleftrightarrow B}{A} \longleftrightarrow E_R$		

# Jetzt seid ihr dran!

Leitet folgendes Theorem her:

$$\vdash \perp \longleftrightarrow (A \wedge \neg A) \quad (2)$$

$\frac{[A] \quad \vdots \quad B}{A \longrightarrow B} \longrightarrow I$	$\frac{[\neg A] \quad \vdots \quad \perp}{A} \text{ raa}$	$\frac{[A] \quad \vdots \quad \perp}{\neg A} \neg I$	$\frac{A \vee B \quad C \quad C}{C} \vee E$	
$\frac{A \quad A \longrightarrow B}{B} \text{ mp}$	$\frac{\perp}{A} \text{ false}$	$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$	$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L$	$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$
$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg E$	$\frac{A}{A \vee B} \vee I_L$	$\frac{B}{A \vee B} \vee I_R$		
$\frac{A \longrightarrow B \quad B \longrightarrow A}{A \longleftrightarrow B} \longleftrightarrow I$	$\frac{A \quad A \longleftrightarrow B}{B} \longleftrightarrow E_L$	$\frac{B \quad A \longleftrightarrow B}{A} \longleftrightarrow E_R$		