Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 7 vom 28.04.26

Natürliches Schließen I

Sommersemester 2026

Serge Autexier, Christoph Lüth

Aufwärmübung

- Formalisiert folgende Aussagen:

  "Wenn ihr intelligent seid, und für die Prüfung lernt, dann werdet ihr auch die Prüfung bestehen. Wenn ihr diesen Kurs gewählt habt, dann seid ihr schon mal intelligent. Wenn ihr hier seid, dann habt ihr wohl diesen Kurs gewählt, und ihr seid offensichtlich hier. Lernen tut ihr auch. Daraus folgt, dass ihr die Prüfung bestehen werdet."

- Mit den Atomen:
  - I — Ihr seid intelligent
  - L — Ihr lernt für die Prüfung
  - K — Ihr habt diesen Kurs gewählt
  - A — Ihr seid hier (anwesend)
  - P — Ihr besteht die Prüfung

In Richtung Beweis

1. Wir sind hier, und wenn wir hier sind, dann haben wir diesen Kurs gewählt, also haben wir den Kurs gewählt.
2. Wir haben den Kurs gewählt, und wenn man den Kurs wählt, ist man intelligent, also sind wir intelligent.
3. Wir haben für die Prüfung gelernt.
4. Wir sind also intelligent **und** haben für die Prüfung gelernt.
5. Wenn wir intelligent sind und für die Prüfung gelernt haben, bestehen wird die Prüfung.
6. Also bestehen wir die Prüfung.

In Richtung Beweis

1. Wir sind hier, und wenn wir hier sind, dann haben wir diesen Kurs gewählt, also haben wir den Kurs gewählt.
2. Wir haben den Kurs gewählt, und wenn man den Kurs wählt, ist man intelligent, also sind wir intelligent.
3. Wir haben für die Prüfung gelernt.
4. Wir sind also intelligent **und** haben für die Prüfung gelernt.
5. Wenn wir intelligent sind und für die Prüfung gelernt haben, bestehen wird die Prüfung.
6. Also bestehen wir die Prüfung.

Noch einmal mit Atomen:

1. Wir haben A und es gilt $A \longrightarrow K$, also haben wir K;
2. Wir haben K und es gilt $K \longrightarrow I$, also haben wir I;
3. Wir haben L.
4. Wir haben I und L, also haben wir $I \wedge L$.
5. Wir haben $I \wedge L$, und es gilt $I \wedge L \longrightarrow P$, also haben wir P.

Schlussregeln Einführung: Beispiel 1

Example (Eine Semantik-Freie Sprache)

Gegeben sei eine Sprache $\mathcal{L} = \{\times, \triangle, \square, \diamondsuit\}$ mit folgenden Schlußregeln:

$$\frac{\diamondsuit}{\times}\,\alpha \qquad \frac{\diamondsuit}{\triangle}\,\beta \qquad \frac{\times \quad \triangle}{\square}\,\gamma \qquad \frac{}{\diamondsuit}\,\delta$$

Wie können wir jetzt $\square$ ableiten?

Schlussregeln

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$$

Schlussregeln

$$\frac{A \quad B}{A \land B} \land I \qquad \frac{A \land B}{A} \land E_L \qquad \frac{A \land B}{B} \land E_R$$

$$\frac{?}{A \longrightarrow B} \longrightarrow I \qquad \frac{A \quad A \longrightarrow B}{B} \; mp$$

Schlussregeln

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A] \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \longrightarrow B} \longrightarrow I \qquad \frac{A \quad A \longrightarrow B}{B} \; mp$$

Schlussregeln

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A} \wedge E_L \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A] \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \longrightarrow B} \longrightarrow I \qquad \frac{A \quad A \longrightarrow B}{B}\ mp$$

Wie beweisen wir das jetzt?

1. Wir haben A und es gilt $A \longrightarrow K$, also haben wir K;
2. Wir haben K und es gilt $K \longrightarrow I$, also haben wir I;
3. Wir haben L.
4. Wir haben I und L, also haben wir $I \wedge L$.
5. Wir haben $I \wedge L$, und es gilt $I \wedge L \longrightarrow P$, also haben wir P.

Schlussregeln Einführung: Beispiel 2

Example (Eine Semantik-Freie Sprache)

Gegeben sei die Sprache $\mathcal{L} = \{\times, \triangle, \Box, \Diamond\}$ mit folgenden Schlußregeln:

$$\frac{\Diamond}{\times}\ \alpha \qquad\qquad \frac{\times}{\triangle}\ \beta \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[\Diamond]\\ \vdots \\ \triangle\end{array}}{\Box}\ \gamma$$

Wie können wir jetzt $\Box$ ableiten?

Ableitbarkeit

Definition (Ableitbarkeit)

Seit Γ eine Menge von Aussagen und $\phi \in \mathit{Prop}$ eine Aussagen, dann ist ϕ aus Γ ableitbar, geschrieben

$$\Gamma \vdash \phi$$

genau dann wenn es eine Ableitung mit den Regeln des natürlichen Schließens gibt, so dass die offenen Annahmen der Ableitung alle in Γ enthalten sind. Für $\emptyset \vdash \phi$ schreiben wir $\vdash \phi$.

Murder Most Foul

Auf dem Landgut von Sir Archibald Fortescue Lord Netherworth-Middlington (seine Freunde nannten ihn Neddles) hat sich ein schreckliches Verbrechen ereignet: der Lord wurde morgens ermordet im Gewächshaus gefunden, wo er seine seltenen Rosen züchtet. Detective Constable Brian Quickthink von Scotland Yard ermittelt.

Außer dem Lord waren zum Tatzeitpunkt (über Nacht) auf dem Landgut nur noch sein Butler und der Gärtner. Wenn der Butler der Täter war, muss er im Gewächshaus gewesen sein. Allerdings war der Butler nicht im Gewächshaus (an seinen Schuhen war keine Spur von Dreck zu finden, und es hatte in der Nacht stark geregnet).

Formalisiert den Sachverhalt in Aussagenlogik, und überführt den Täter!

Fehlende Regeln

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee I_L \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee I_R \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ \vee E$$

$$\frac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\ \neg I \qquad \frac{A \quad \neg A}{\bot}\ \neg E$$

$$\frac{\bot}{A}\ \mathit{false} \qquad \frac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{A}\ \mathit{raa}$$