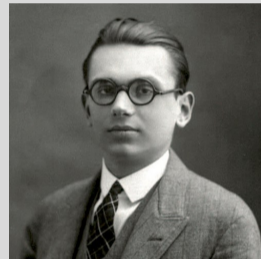


Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 4 vom 15.04.26

Aussagenlogik III

Sommersemester 2026



Serge Autexier, Christoph Lüth

## Zum Warmwerden

Wir haben über das exklusive Oder schon gesprochen.

- ▶ Welche Wahrheitstabelle kann der entsprechende Operator  $\dot{\vee}$  haben?
- ▶ Und wie können wir  $\phi \dot{\vee} \psi$  mit den anderen Operatoren ausdrücken?

# Beweis durch Umformen

Ein typischer Beweis:

$$\begin{aligned} & x^2 - 8 \cdot x + 12 = 0 \\ \iff & x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 16 - 4 = \text{.svwerder990} \\ \iff & (x - 4)^2 - 4 = 0 \\ \iff & (x - 4)^2 = 4 \\ \iff & (x - 4) = 2 \vee (x - 4) = -2 \\ \iff & x = 6 \vee x = 2 \end{aligned}$$

# Ersetzung

- ▶ Reicht uns das für Umformungen?

# Ersetzung

- ▶ Reicht uns das für Umformungen?
- ▶ Wir brauchen Substitutivität
- ▶ Was heißt “Ersetzen von Teilformeln” eigentlich?

# Ersetzen

## Definition (Substitution)

Für  $\phi \in Prop$ ,  $q, p \in P$  und  $\psi \in Prop$  definieren wir die Ersetzung von  $q$  in  $\phi$  durch  $\psi$ , geschrieben  $\phi[\psi/q]$ , rekursiv über der Struktur von  $\phi$

# Ersetzen

## Definition (Substitution)

Für  $\phi \in Prop$ ,  $q, p \in P$  und  $\psi \in Prop$  definieren wir die Ersetzung von  $q$  in  $\phi$  durch  $\psi$ , geschrieben  $\phi[\psi/q]$ , rekursiv über der Struktur von  $\phi$  wie folgt:

$$p[\psi/q] = \begin{cases} \psi & p = q \quad (p \in P) \\ p & p \neq q \quad (p \in P) \end{cases}$$

$$\perp[\psi/q] = \perp$$

$$(\neg\phi)[\psi/q] = \neg(\phi[\psi/q])$$

$$(\phi_1 \wedge \phi_2)[\psi/q] = (\phi_1[\psi/q]) \wedge (\phi_2[\psi/q])$$

$$(\phi_1 \vee \phi_2)[\psi/q] = (\phi_1[\psi/q]) \vee (\phi_2[\psi/q])$$

$$(\phi_1 \longrightarrow \phi_2)[\psi/q] = (\phi_1[\psi/q]) \longrightarrow (\phi_2[\psi/q])$$

$$(\phi_1 \longleftrightarrow \phi_2)[\psi/q] = (\phi_1[\psi/q]) \longleftrightarrow (\phi_2[\psi/q])$$

## Jetzt seid ihr dran

Gegeben die Formel  $\rho = (A \rightarrow \neg B \wedge C) \vee (C \vee \neg A)$ , die Belegung  $\nu = \langle A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 1 \rangle$  und  $\sigma = (A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \wedge C)$ .

**i** Berechne  $\phi = \rho[\sigma/A]$ .

## Jetzt seid ihr dran

Gegeben die Formel  $\rho = (A \longrightarrow \neg B \wedge C) \vee (C \vee \neg A)$ , die Belegung  $\nu = \langle A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 1 \rangle$  und  $\sigma = (A \longrightarrow B \longleftrightarrow \neg B \wedge C)$ .

i Berechne  $\phi = \rho[\sigma/A]$ .

ii Berechne  $t_1 = \llbracket \phi \rrbracket_\nu$ .

## Jetzt seid ihr dran

Gegeben die Formel  $\rho = (A \rightarrow \neg B \wedge C) \vee (C \vee \neg A)$ , die Belegung  $v = \langle A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 1 \rangle$  und  $\sigma = (A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \wedge C)$ .

i Berechne  $\phi = \rho[\sigma/A]$ .

ii Berechne  $t_1 = \llbracket \phi \rrbracket_v$ .

iii Berechne  $s = \llbracket \sigma \rrbracket_v$ .

## Jetzt seid ihr dran

Gegeben die Formel  $\rho = (A \rightarrow \neg B \wedge C) \vee (C \vee \neg A)$ , die Belegung  $v = \langle A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 1 \rangle$  und  $\sigma = (A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \wedge C)$ .

- i Berechne  $\phi = \rho[\sigma/A]$ .
- ii Berechne  $t_1 = \llbracket \phi \rrbracket_v$ .
- iii Berechne  $s = \llbracket \sigma \rrbracket_v$ .
- iv Berechne  $w = v[A \mapsto s]$ .

## Jetzt seid ihr dran

Gegeben die Formel  $\rho = (A \rightarrow \neg B \wedge C) \vee (C \vee \neg A)$ , die Belegung  $v = \langle A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 1 \rangle$  und  $\sigma = (A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \wedge C)$ .

- i Berechne  $\phi = \rho[\sigma/A]$ .
- ii Berechne  $t_1 = \llbracket \phi \rrbracket_v$ .
- iii Berechne  $s = \llbracket \sigma \rrbracket_v$ .
- iv Berechne  $w = v[A \mapsto s]$ .
- v Berechne  $t_2 = \llbracket \rho \rrbracket_w$ .

# Substitutionslemma

## Lemma (Substitutionslemma)

Für alle Formeln  $\phi, \psi \in Prop$  und Belegungen  $v$  gilt:

$$\llbracket \phi[\psi/p] \rrbracket_v = \llbracket \phi \rrbracket_{v[p \mapsto \llbracket \psi \rrbracket_v]}$$

# Substitutionslemma

## Lemma (Substitutionslemma)

Für alle Formeln  $\phi, \psi \in \text{Prop}$  und Belegungen  $v$  gilt:

$$\llbracket \phi[\psi/p] \rrbracket_v = \llbracket \phi \rrbracket_{v[p \mapsto \llbracket \psi \rrbracket_v]}$$

## Theorem (Substitutionstheorem)

Wenn  $\phi_1 \approx \phi_2$ , dann  $\psi[\phi_1/p] \approx \psi[\phi_2/p]$ .