Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 3 vom 14.04.26

Aussagenlogik II

Sommersemester 2026

Serge Autexier, Christoph Lüth

Zum Warmwerden

Formalisiert folgende Aussagen in Aussagenlogik. Welches ist die Menge P der atomare Aussagen (für jede Aussage)?

1. "Wenn ich alle Übungsblätter abgebe und die Prüfung bestehe, bekomme ich den Schein. Wenn ich keinen Schein habe, habe ich also entweder nicht alle Übungsblätter abgegeben oder die Prüfung nicht bestanden."

2. "Wenn es regnet, werde ich naß. Wenn ich aber einen Schirm habe, dann werde ich nicht naß, wenn es regnet."

3. "Wenn ich gegessen habe, bin ich satt, aber ich bin hungrig, also habe ich nicht gegessen."

Wiederholung

Definition

Für eine Formel $\phi \in \mathit{Prop}$ und eine Belegung $v : \mathrm{atoms}(\phi) \to \mathbb{B}$ ist der Wert $[\![\phi]\!]_v$ von ϕ unter v induktiv definiert als

$$\begin{aligned}
[\![p]\!]_v &= v(p) \quad (\text{für } p \in P) \\
[\![\bot]\!]_v &= 0 \\
[\![\neg\phi]\!]_v &= 1 - [\![\phi]\!]_v \\
[\![\phi \wedge \psi]\!]_v &= \min([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) \\
[\![\phi \vee \psi]\!]_v &= \max([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) \\
[\![\phi \longrightarrow \psi]\!]_v &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } [\![\phi]\!]_v = 1 \text{ und } [\![\psi]\!]_v = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Tautologien

Definition

Gegeben eine Formel $\phi \in Prop$, dann ist ϕ eine **Tautologie**, wenn $[\![\phi]\!]_v = 1$ **für alle Belegungen** v. Wir schreiben dafür auch $\models \phi$, und sagen ϕ ist **semantisch gültig**.

- Unerfüllbare Formel?

Tautologien

Definition

Gegeben eine Formel $\phi \in \mathit{Prop}$, dann ist ϕ eine **Tautologie**, wenn $[\![\phi]\!]_v = 1$ **für alle Belegungen** v. Wir schreiben dafür auch $\models \phi$, und sagen ϕ ist **semantisch gültig**.

- Unerfüllbare Formel?
- Unerfüllbare Formel vs. tautologische Formel?

Tautologien

Definition

Gegeben eine Formel $\phi \in \mathit{Prop}$, dann ist ϕ eine **Tautologie**, wenn $[\![\phi]\!]_v = 1$ **für alle Belegungen** v. Wir schreiben dafür auch $\models \phi$, und sagen ϕ ist **semantisch gültig**.

- Unerfüllbare Formel?
- Unerfüllbare Formel vs. tautologische Formel?
- Erfüllbare Formel?

Wie berechnen wir tautologische Gültigkeit?

- $A \wedge B \longrightarrow A$

Wie berechnen wir tautologische Gültigkeit?

- $A \wedge B \longrightarrow A$
- $\bot \longrightarrow A$

Wie berechnen wir tautologische Gültigkeit?

- $A \wedge B \longrightarrow A$
- $\bot \longrightarrow A$: (Ex $falso$ $quodlibet$)
- $A \vee B \longrightarrow A$

Wie berechnen wir tautologische Gültigkeit?

- $A \wedge B \longrightarrow A$
- $\bot \longrightarrow A$: (*Ex falso quodlibet*)
- $A \vee B \longrightarrow A$: Gegenbeispiel
- $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow (A \wedge B \longrightarrow C)$
- $(A \wedge B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$

Jetzt seid ihr dran

1. $A \vee \neg A$ (*Tertium non datur*, Satz des ausgeschlossenen Dritten)
2. $(\neg A \vee B) \longrightarrow (A \longrightarrow B)$ und umgekehrt.

Semantische Folgerung

Definition (Semantische Folgerung)

Semantische Folgerung

Definition (Semantische Folgerung)

Sei $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ eine Menge von Aussagen, und ψ eine Aussage, dann ist $\Gamma \models \psi$ gdw. folgendes gilt: für alle Valuationen v mit $[\![\phi_1]\!]_v = 1, \ldots, [\![\phi_n]\!]_v = 1$ ist auch $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Semantische Folgerung

Definition (Semantische Folgerung)

Sei $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ eine Menge von Aussagen, und ψ eine Aussage, dann ist $\Gamma \models \psi$ gdw. folgendes gilt: für alle Valuationen v mit $[\![\phi_1]\!]_v = 1, \ldots, [\![\phi_n]\!]_v = 1$ ist auch $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Theorem (Deduktionstheorem)

Semantische Folgerung

Definition (Semantische Folgerung)

Sei $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ eine Menge von Aussagen, und ψ eine Aussage, dann ist $\Gamma \models \psi$ gdw. folgendes gilt: für alle Valuationen v mit $[\![\phi_1]\!]_v = 1, \ldots, [\![\phi_n]\!]_v = 1$ ist auch $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Theorem (Deduktionstheorem)

1. $\phi \models \psi$ *gdw.* $\models \phi \longrightarrow \psi$
2. $\models \phi \wedge \psi$ *gdw.* $\models \phi$ *und* $\models \psi$
3. $\Gamma \models \psi$ *gdw.* $\models \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \longrightarrow \psi$

Semantische Folgerung

Definition (Semantische Folgerung)

Sei $\Gamma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ eine Menge von Aussagen, und ψ eine Aussage, dann ist $\Gamma \models \psi$ gdw. folgendes gilt: für alle Valuationen v mit $[\![\phi_1]\!]_v = 1, \dots, [\![\phi_n]\!]_v = 1$ ist auch $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Theorem (Deduktionstheorem)

1. $\phi \models \psi$ *gdw.* $\models \phi \longrightarrow \psi$
2. $\models \phi \wedge \psi$ *gdw.* $\models \phi$ *und* $\models \psi$
3. $\Gamma \models \psi$ *gdw.* $\models \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \longrightarrow \psi$

Beweis