

11. Übungsblatt

Ausgabe: 25.06.25**Abgabe:** 02.07.25 14:00

Die Lösungen bitte in der Vorlage `uebung-11.md` eintragen und diese in Eurem Repository rechtzeitig committen und hochladen.

Teil des Beweises zur Irrationalität der Quadratwurzel von 2 ist folgendes unscheinbares Lemma:

$$\forall x. \text{even}(x^2) \longrightarrow \text{even}(x) \quad (\text{even-sqr})$$

Um das zu zeigen, müssen wir erstmal definieren was gerade und ungerade Zahlen überhaupt sind:

$$\forall x. \text{even}(x) \longleftrightarrow \exists n. x = 2 \cdot n \quad (\text{def-even})$$

$$\forall x. \text{odd}(x) \longleftrightarrow \exists n. x = 2 \cdot n + 1 \quad (\text{def-odd})$$

11.1 Ein erstes Theorem

Wir zeigen erst einmal die andere Richtung von Theorem (*even-sqr*)

$$\text{even}(x) \longrightarrow \text{even}(x^2) \quad (\text{sqr-even})$$

Der Beweis ist wie folgt strukturiert:

- Wenn x gerade ist, gibt es ein r so dass $x = 2 \cdot r$
- Dann ist $x^2 = (2 \cdot r)^2 = 2 \cdot (2 \cdot r^2)$
- Dann gibt es ein s , so dass $x^2 = 2 \cdot s$ (nämlich $s = 2 \cdot r$)
- Also ist x^2 gerade.

Formalisiert diesen Beweis in natürlichem Schließen wie in der Vorlesung demonstriert. Bei Anwendung der Regel *substt* gebt an, wie der Term t instantiiert wird. Der Trick an diesem Beweis ist die korrekte Behandlung der Existenzquantoren in der Definition von *even*. Ihr könnt alle Axiome aus den Vorlesungsnotizen nutzen; wenn ihr weitere Axiome benötigt, gebt diese an.

11.2 Ein wichtiges Lemma

Der Beweis von Theorem (*even-sqr*) nutzt die Kontraposition. Wir zeigen zuerst

$$\text{odd}(x) \longrightarrow \text{odd}(x^2) \quad (\text{odd-sqr})$$

Der Beweis ist wie eben, mit etwas mehr Rechnerei und der binomischen Formel:

- Wenn x ungerade ist, gibt es ein r so dass $x = 2 \cdot r + 1$
- Dann ist $x^2 = (2 \cdot r + 1)^2 = (2 \cdot r)^2 + 2 \cdot 2 \cdot r + 1^2 = 2 \cdot (2 \cdot r^2 + 2 \cdot r) + 1$
- Dann gibt es ein s , so dass $x^2 = 2 \cdot s + 1$ (nämlich $s = 2 \cdot r^2 + 2 \cdot r$)

- Also ist x^2 ungerade.

Formalisiert den Beweis in natürlichem Schließen. Ihr könnt dabei folgende Axiome nutzen:

$$\begin{array}{ll}
 1^2 = 1 & (1\text{-sqr}) \\
 \forall x, y, z. x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z & (\text{mult-distrib}) \\
 \forall x, y. (x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 & (\text{binom-2})
 \end{array}$$

11.3 Ein Zweites Theorem

Jetzt zeigen wir das Theorem (*even-sqr*) durch Kontraposition, d. h. wir zeigen $\text{even}(x^2) \rightarrow \text{even}(x)$ indem wir ex mit der Regel *raa* auf $\neg \text{even}(x) \rightarrow \neg \text{even}(x^2)$ zurückführen (was wir mit (*odd-sqr*) zeigen).

Formalisiert Sie diese Herleitung in natürlichem Schließen.

Ihr könnt folgende Eigenschaften von *even* und *odd* nutzen (mehr sollte es nicht brauchen):

$$\begin{array}{ll}
 \forall x. \text{even}(x) \longleftrightarrow \neg \text{odd}(x) & (\text{even-or-odd}^*) \\
 \forall x. \neg \text{even}(x) \rightarrow \text{odd}(x) & (\text{not-even-odd}^*) \\
 \forall x. \text{even}(x) \rightarrow \neg \text{odd}(x) & (\text{even-not-odd}^*)
 \end{array}$$