Einführung in die Formale Logik SoSe 2025

Serge Autexier
Christoph Lüth

5. Übungsblatt

Ausgabe: 07.05.25
Abgabe: 14.05.25 14:00

Die Lösungen bitte in der Vorlage `uebung-05.md` *eintragen und diese in Eurem Repository rechtzeitig committen und hochladen.*

5.1 *Gerade Quadrate*

In der Vorlesung haben wir den Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, formalisert. Dabei haben wir ein Lemma benutzt, aber nicht bewiesen:

Theorem 1 *p ist gerade gdw. p^2 ist gerade. ($A \longleftrightarrow B$)*

Beweis. Wir beweisen, wie üblich, die Äquivalenz, indem wir die Implikation in beiden Richtungen beweisen.

Hinrichtung:		
	$p = 2k$ (p gerade)	A
$\Longleftrightarrow$	$p^2 = 4k^2$	C_1
$\Longrightarrow$	$p^2 = 2l$ mit $l = 2k^2$, p^2 gerade	B
Rückrichtung:		
	Sei p nicht gerade, also $p = 2k + 1$	$\neg A$
$\Longleftrightarrow$	$p^2 = (2k+1)^2$	C_2
$\Longleftrightarrow$	$p^2 = 4k^2 + 4k + 1$	C_3
$\Longleftrightarrow$	$p^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$	C_4
$\Longrightarrow$	p^2 ist nicht gerade	$\neg B$
	Die Annahme der Rückrichtung ist, dass p^2 gerade ist	B
$\Longrightarrow$	Widerspruch $\lightning$	$\bot$
$\Longrightarrow$	Also ist p gerade	A.

$\square$

Wir haben also folgende Atome

A	p gerade, $p = 2k$	B	p^2 gerade, $p^2 = 2k$
C_1	$p^2 = 4k^2$	C_2	$p^2 = (2k+1)^2$
C_3	$p^2 = 4k^2 + 4k + 1$	C_4	$p^2 = 2(2k^+2k) + 1$

und folgende Axiome:

$$\Gamma = \{A \longleftrightarrow C_1, C_1 \longrightarrow B, \neg A \longleftrightarrow C_2, C_2 \longleftrightarrow C_3, C_3 \longleftrightarrow C_4, C_4 \longrightarrow \neg B\}$$

Beschreiben Sie die logische Struktur des Beweises durch einen Ableitungsbaum im natürlichen Schließen, so wie wir es für den Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ in der Vorlesung gemacht haben, d.h. konstruieren Sie einen Beweisbaum für

$$\Gamma \vdash A \longleftrightarrow B$$

Hinweis: Die in der Vorlesung vorgestellten Inferenzbäume sind inutitiv aber etwas umständlich in Markdown (oder erst recht LaTeX) zu setzen. Um Beweise maschinell lesbar aufschreiben wollen, oder einfach nur in Markdown für die Übungsblätter, bietet sich eine lineare Notation an.

In der linearen Notation hat jede Zeile ein Label (das kann, muss aber nicht, eine Zeilennummer sein). Ein Beweis ist dann eine Folge von Zeilen. Jede Zeile besteht aus

$\longrightarrow I$	`impI`	$\wedge I$	`conjI`	$\neg I$	`notI`	$\vee I_L$	`disjIL`	$\longleftrightarrow I$	`iffI`
mp	`mp`	$\wedge E_L$	`conjEL`	$\neg E$	`notE`	$\vee I_R$	`disjIR`	$\longleftrightarrow E_L$	`iffEL`
false	`false`	$\wedge E_R$	`conjER`			$\vee E$	`disjE`	$\longleftrightarrow E_R$	`iffER`
raa	`raa`								

Tabelle 1: Regelnamen in Markdown-Notation

- entweder einer Aussage $\phi \in Prop$ der Aussagenlogik, gefolgt von einem Regelnamen, dem Verweis auf die Prämissen der Regel in runden Klammern, und eventuell durch diesen Beweis eingeführte offene Annahmen (wie in den Regeln $\longrightarrow I$ oder $\vee E$);
- oder eine Ausage $\phi \in Prop$ in eckigen Klammern, gefolgt von einem Label, das entspricht einer Annahme, die hier genutzt wird (entweder aus einer Menge von Axiomen, oder durch die entsprechenden Regeln eingeführt).

Die Annahmen werden benannt; das können, wie in den Beispielen oben, Zahlen sein, oder beliebige Label (wie in der Notation unten); der Namensraum der Zeilen und der Annahmen ist disjunkt. Man beachte, dass eine Annnahme öfter als ein Mal (oder auch gar nicht) benutzt werden können, aber *nur in dem Zeilen, die den Prämissen und deren Prämissen* (also dem Teilbeweisbaum über der Regel, der die Annahmen einführt).

Hier ist ein Beispiel aus der Vorlesung in linearer Markdown-Notation:

```
8: [A] b
7: [B] c
6: A & B         | conjI (7, 8)
5: [A & B --> C] a
4: C             | mp (5, 6)
3: B--> C        | impI (4) [c]
2: A--> (B--> C) | impI (3) [b]
1: (A & B --> C)--> (A--> (B--> C))  | impI (2) [a]
```

Die Zeilennummern gehen von unten, weil wir den Beweis von der Behauptung ausgehend schreiben. Ein Vorteil der Notation mit Zeilennummern ist auch, dass wir den Beweis genauso gut anders herum aufschreiben können:

```
1: (A & B --> C)--> (A--> (B--> C))  | impI (2) [a]
2: A--> (B--> C) | impI (3) [b]
3: B--> C        | impI (4) [c]
4: C             | mp (5, 6)
5: [A & B --> C] a
6: A & B         | conjI (7, 8)
7: [B] c
8: [A] b
```

Die Markdown-Notation für die Aussagen sollte selbsterklärend sein. Tabelle 1 zeigt die Namen der Regeln in Markdown-Notation. Die Vorlesungsnotizen enthalten eine weitergehende Diskussion dieser Notation.