

# 11. Übungsblatt

**Ausgabe:** 29.06.23**Abgabe:** 06.07.23 08:30

Die Lösungen bitte in der Vorlage *uebung-11.md* eintragen und diese in Eurem Repository rechtzeitig committen und hochladen.

## 11.1 Gerade und Ungerade

Teil des Beweises zur Irrationalität der Quadratwurzel von 2 ist folgendes unscheinbares Lemma:

$$\forall x. \text{even}(x^2) \longrightarrow \text{even}(x)$$

Um das zu zeigen, müssen wir erstmal definieren was gerade und ungerade Zahlen überhaupt sind. Wir brauchen dazu einige zusätzliche Funktionen (nämlich  $\{1_0, 2_0, \text{even}_1, \text{odd}_1, s_1, +_2\}$ ), und Axiome:

$$\forall x. \text{even}(x) \longleftrightarrow \exists n. x = 2 \cdot n \quad (1)$$

$$\forall x. \text{odd}(x) \longleftrightarrow \exists n. x = s(2 \cdot n) \quad (2)$$

$$\forall x. \neg(x = s(x)) \quad (3)$$

$$\forall x. s(x) = x + 1 \quad (4)$$

Ihre Aufgabe ist es, zuerst einige Eigenschaften von even und odd zu zeigen:

$$\forall x. \text{even}(x) \longrightarrow \text{odd}(s(x)) \quad (5)$$

$$\forall x. \text{odd}(x) \longrightarrow \text{even}(s(x)) \quad (6)$$

$$\forall x. \text{even}(x) \longrightarrow \neg(\text{odd}(x)) \quad (7)$$

$$(8)$$

Mit diesen Eigenschaften und den Axiomen (10) bis (13) zeigen Sie jetzt:

$$\forall x. \text{even}(x^2) \longrightarrow \text{even}(x) \quad (9)$$

Der Beweis funktioniert durch Widerspruch: nehmen wir an,  $x$  sei ungerade, dann wäre auch  $x^2$  ungerade, aber das ist es ja gerade nicht.

Geben Sie die Ableitung mit einem Detailgrad wie in der Vorlesung an. Sie können folgende Axiom benutzen:

$$\forall x. \text{odd}(x) \longrightarrow \neg(\text{even}(x)) \quad (10)$$

$$\forall x. \neg(\text{even}(x)) \longrightarrow \text{odd}(x) \quad (11)$$

$$\forall x. \text{odd}(x) \longrightarrow \text{odd}(x^2) \quad (12)$$

$$\forall n. s(s(2 \cdot n)) = 2 \cdot s(n) \quad (13)$$

Wenn Sie weitere Axiome benötigen, geben Sie diese an. Wenn Sie Axiome wie (10) nutzen, dann können Sie die allquantifizierten Variablen direkt instantiieren, und brauchen nicht die eigentlich nötigen  $\forall E$ -Schritte anzugeben. Bei Anwendung der Regel *subst* geben Sie an, wie der Term  $\phi$  instantiiert wird.

## 11.2 The Missing Link

*Zusatzaufgabe*

Wer das noch weiter üben will, versuche sich an dem fehlenden Beweis von oben:

$$\forall x. \text{odd}(x) \longrightarrow \text{odd}(x^2) \quad (14)$$

Dieser Beweis benötigt noch (mindestens) zwei weitere Axiome (welche?), und erfordert mehr Umformungen als die vorherigen.