

# 5. Übungsblatt

**Ausgabe:** 11.05.23

**Abgabe:** 16.05.23 08:30

Die Lösungen bitte in der Vorlage `uebung-05.md` eintragen und diese in Eurem Repository rechtzeitig committen und hochladen.

## 5.1 Gerade Quadrate

In der Vorlesung haben wir den Beweis, dass  $\sqrt{2}$  irrational ist, formalisiert. Dabei haben wir ein Lemma benutzt, aber nicht bewiesen:

**Theorem 1**  $p$  ist gerade gdw.  $p^2$  ist gerade. ( $A \longleftrightarrow B$ )

*Beweis.* Wir beweisen, wie üblich, die Äquivalenz, indem wir die Implikation in beiden Richtungen beweisen.

Hinrichtung:

$$\begin{array}{lll}
 & p = 2k \text{ (p gerade)} & A \\
 \iff & p^2 = 4k^2 & C_1 \\
 \implies & p^2 = 2l \text{ mit } l = 2k^2, p^2 \text{ gerade} & B
 \end{array}$$

Rückrichtung:

$$\begin{array}{lll}
 & \text{Sei } p \text{ nicht gerade, also } p = 2k + 1 & \neg A \\
 \iff & p^2 = (2k + 1)^2 & C_2 \\
 \iff & p^2 = 4k^2 + 4k + 1 & C_3 \\
 \iff & p^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 & C_4 \\
 \implies & p^2 \text{ ist nicht gerade} & \neg B \\
 & \text{Die Annahme der Rückrichtung ist, dass } p^2 \text{ gerade ist} & B \\
 \implies & \text{Widerspruch } \color{red}{\text{!}} & \perp \\
 \implies & \text{Also ist } p \text{ gerade} & A.
 \end{array}$$

□

Wir haben also folgende Atome

$$\begin{array}{ll}
 A & p \text{ gerade, } p = 2k \\
 C_1 & p^2 = 4k^2 \\
 C_3 & p^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\
 B & p^2 \text{ gerade, } p^2 = 2k \\
 C_2 & p^2 = (2k + 1)^2 \\
 C_4 & p^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1
 \end{array}$$

und folgende Axiome:

$$\Gamma = \{A \longleftrightarrow C_1, C_1 \longrightarrow B, \neg A \longleftrightarrow C_2, C_2 \longleftrightarrow C_3, C_3 \longleftrightarrow C_4, C_4 \longrightarrow \neg B\}$$

Beschreiben Sie die logische Struktur des Beweises durch einen Ableitungsbaum im natürlichen Schließen, so wie wir es für den Beweis der Irrationalität von  $\sqrt{2}$  in der Vorlesung gemacht haben, d.h. konstruieren Sie einen Beweisbaum für

$$\Gamma \vdash A \longleftrightarrow B$$

*Hinweis:* Die in der Vorlesung vorgestellten Inferenzbäume sind etwas umständlich in Markdown (oder erst recht  $\text{\LaTeX}$ ) zu setzen, deshalb können Sie gerne eine Papierversion in der Veranstaltung am Dienstag abgeben.