Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 22 vom 06.07.23

Arithmetik

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2023

Die Sprache der Zahlen

Definition (Presburger-Arithmetik)

- Signatur: $\Sigma_{PR} \stackrel{def}{=} \{0^0, S^1, (+)^2\}$
- Axiome:Γ_{PR} mit

$$\forall x.\, 0 \neq S(x) \qquad (PA1)$$

$$\forall x, y.\, S(x) = S(y) \longrightarrow x = y \qquad (PA2)$$

$$\forall x.\, x + 0 = x \qquad (PA3)$$

$$\forall x, y.\, x + S(y) = S(x + y) \qquad (PA4)$$

$$\phi(0) \wedge (\forall x.\, \phi(x) \longrightarrow \phi(S(x))) \longrightarrow \forall x.\, \phi(x) \qquad (Ind)$$

Eigenschaften der Presburger-Arithmetik

- **Entscheidbar** mit Aufwand $2^{2^{cn}}$ (in n Anzahl Symbole)
- Trotzdem **praktisch nutzbare** Beweiser
- Definiert lineare Ungleichungen über $\mathbb{N}$

Peano-Arithmetik

Definition (Peano-Arithmetik)

- Signatur: $\Sigma_{\mathbf{PA}} \stackrel{def}{==} \Sigma_{PR} + \{(\cdot)^2\}$
- Axiome: $\Gamma_{\mathbf{PA}} \stackrel{def}{=} \Gamma_{PR}$ und

$$\forall x.\, x \cdot 0 = 0 \qquad (PA5)$$

$$\forall x, y.\, x \cdot S(y) = x \cdot y + x \qquad (PA6)$$

Theorem (**PA**ist unentscheidbar)

Die Peano-Arithmetik ist ***nicht*** *entscheidbar.*

Modelle I

- $\mathbb{N}$ mit offensichtlichen Funktionen ist Modell (**Standard-Modell**) von **PA**.
- Weitere Modelle:
  - $\mathbb{N}$ mit weiteren Kopien von $\mathbb{N}$?
  - $\mathbb{N}$ mit Zyklen?

Das Beweisen mit Zahlen

Induktionsaxiom gibt abgeleitete Regel:

$$\frac{\phi(0) \quad \forall x.\, \phi(x) \longrightarrow \phi(S(x))}{\forall x.\, \phi(x)}\ ind$$

Definition:

$$x < y \longleftrightarrow \exists z.\, x + S(z) = y$$
$$x \leq y \longleftrightarrow x = y \lor x < y$$

Beweise I

1. $\mathbf{PA} \vdash 0 < S(0)$
2. $\mathbf{PA} \vdash \forall x.\, x < S(x)$
3. $\mathbf{PA} \vdash \forall x, y, z.\, x < y \wedge y < z \longrightarrow x < z$

Beweise II

1. $\mathbf{PA} \vdash \forall x.\, 0 \leq x$
2. $\mathbf{PA} \vdash \forall x.\, x = 0 \vee \exists y.\, x = S(y)$
3. $\mathbf{PA} \vdash \forall x, y.\, x < y \longrightarrow S(x) \leq y$
4. $\mathbf{PA} \vdash \forall x, y.\, x < y \vee x = y \vee y < x$

Totale Ordnung auf den Elementen der Struktur folgt aus Axiomen **PA**

Modelle II

- $\mathbb{N}$ mit offensichtlichen Funktionen ist Modell (**Standard-Modell**) von **PA**.
- Weitere Modelle?
  - $\mathbb{N}$ mit weiteren Kopien von $\mathbb{N}$?
  - $\mathbb{N}$ mit Zyklen?

Modelle II

- $\mathbb{N}$ mit offensichtlichen Funktionen ist Modell (**Standard-Modell**) von **PA**.
- Weitere Modelle?
  - $\mathbb{N}$ mit weiteren Kopien von $\mathbb{N}$? Nur **jenseits** von $\mathbb{N}$
  - $\mathbb{N}$ mit Zyklen?

Modelle II

- $\mathbb{N}$ mit offensichtlichen Funktionen ist Modell (**Standard-Modell**) von **PA**.
- Weitere Modelle?
  - $\mathbb{N}$ mit weiteren Kopien von $\mathbb{N}$?
  - $\mathbb{N}$ mit Zyklen? Nein