Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 21 vom 04.07.23

Prädikatenlogik IV

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2023

Regeln für das natürliche Schließen

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \longrightarrow B}\ \longrightarrow I \qquad \frac{A \quad A \longrightarrow B}{B}\ mp \qquad \frac{\bot}{A}\ \mathit{false} \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A}\ raa$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \wedge I \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge E_L \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge E_R$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\ \neg I \qquad \frac{A \quad \neg A}{\bot}\ \neg E \qquad \frac{A}{A \vee B}\ \vee I_L \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee I_R \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\ \vee E$$

Regeln für das natürliche Schließen

$$\frac{\phi}{\forall x.\, \phi}\ \forall I \quad (*) \qquad \frac{\forall x.\, \phi}{\phi[t/x]}\ \forall E \qquad \frac{\phi[t/x]}{\exists x.\, \phi}\ \exists I \qquad \frac{\exists x.\, \phi \qquad \begin{matrix}[\phi]\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\psi}\ \exists E(*)$$

Eigenvariablenbedingung (*): x ist nicht frei in einer offenen Hypothese

Eigenvariablenbedingung (*): x ist nicht frei in einer offenen Hypothese (außer natürlich ϕ) der Ableitung.

Korrektheit und Vollständigkeit der FO Logik

Theorem

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

- $\Leftarrow$: Korrektheit
- $\Rightarrow$: Vollständigkeit

Henkin Theorien

Definition (Henkin Theorien)

1. Eine **Theorie** T ist eine Klasse von Formeln, die abgeschlossen ist unter $\vdash$. Formal:

$$\text{für alle Formeln } \varphi \text{ gilt: } T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$$

2. Eine Theorie T ist eine **Henkin Theorie**, falls für alle Formeln der Form $\exists x.\varphi \in T$ eine Konstante c existiert, so dass $\exists x.\varphi \longrightarrow \varphi[c/x] \in T$

Henkin Theorien

Definition (Henkin Theorien)

- Eine **Theorie** T ist eine Klasse von Formeln, die abgeschlossen ist unter $\vdash$. Formal:

$$\text{für alle Formeln } \varphi \text{ gilt: } T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$$

- Eine Theorie T ist eine **Henkin Theorie**, falls für alle Formeln der Form $\exists x.\varphi \in T$ eine Konstante c existiert, so dass $\exists x.\varphi \longrightarrow \varphi[c/x] \in T$

Definition (Konservative Erweiterung)

Seien T und T' Theorien bezüglich der Signaturen Σ und Σ'.

- T' ist eine Erweiterung von T, wenn $T \subseteq T'$
- T' ist eine **konservative Erweiterung** von T, falls $T' \downarrow_{\Sigma} = T$ (alle Theoreme in T', die in der Signatur Σ sind, sind schon Theoreme in T)

Henkin Erweiterungen einer Theorie

Definition (Henkin Erweiterung)

Sei T eine Theorie bzgl. einer Signatur Σ und Σ^* die Erweiterung von Σ um eine Konstante c_φ für jede Formel $\exists x.\varphi \in T$. Dann ist die **Henkin Erweiterung** T^* definiert als:

$$T^* := T \cup \{\exists x.\varphi \longrightarrow \varphi[c_\varphi/x] \mid \exists x.\varphi \text{ ist eine geschlossene Formeln in } T\}$$

Henkin Erweiterungen einer Theorie

Definition (Henkin Erweiterung)

Sei T eine Theorie bzgl. einer Signatur Σ und Σ^* die Erweiterung von Σ um eine Konstante c_φ für jede Formel $\exists x.\varphi \in T$. Dann ist die **Henkin Erweiterung** T^* definiert als:

$$T^* := T \cup \{\exists x.\varphi \longrightarrow \varphi[c_\varphi/x] \mid \exists x.\varphi \text{ ist eine geschlossene Formeln in } T\}$$

Lemma

Henkin Erweiterungen sind konservative Erweiterungen

Henkin Erweiterungen einer Theorie

Definition (Henkin Erweiterung)

Sei T eine Theorie bzgl. einer Signatur Σ und Σ^* die Erweiterung von Σ um eine Konstante c_φ für jede Formel $\exists x.\varphi \in T$. Dann ist die **Henkin Erweiterung** T^* definiert als:

$$T^* := T \cup \{\exists x.\varphi \longrightarrow \varphi[c_\varphi/x] \mid \exists x.\varphi \text{ ist eine geschlossene Formeln in } T\}$$

Lemma

Henkin Erweiterungen sind konservative Erweiterungen

Beweis.

Zu zeigen:

a) Falls $\Gamma, \exists x.\varphi \longrightarrow \varphi[c_\varphi/x] \vdash \psi$, $c_\varphi \notin \Gamma, \psi$, dann gilt $\Gamma \vdash \psi$

b) Sei $T^* \vdash \psi$. Zeige $T \vdash \psi$ per Induktion über Anzahl der neue hinzugefügten Formeln $\exists x.\varphi \longrightarrow \varphi[c_\varphi/x]$ unter Verwendung von (a).

$\square$

Henkin Abschluss einer Theorie ist konservative Erweiterung

Lemma

Sei T eine Σ-Theorie. Definiere:

- $T_0 := T$ *ist Theorie zur Signatur* $\Sigma_0 := \Sigma$
- $T_{n+1} := (T_n)^*$ *ist Theorie zur Signatur* Σ_{n+1}
- $T_\omega := \bigcup_{n\geq 0} T_n$ *zur Signatur* Σ_ω

Dann ist T_ω eine Henkin Theorie und eine konservative Erweiterung von T.

Henkin Abschluss einer Theorie ist konservative Erweiterung

Lemma

Sei T eine Σ-Theorie. Definiere:

- $T_0 := T$ *ist Theorie zur Signatur* $\Sigma_0 := \Sigma$
- $T_{n+1} := (T_n)^*$ *ist Theorie zur Signatur* Σ_{n+1}
- $T_\omega := \bigcup_{n \geq 0} T_n$ *zur Signatur* Σ_ω

Dann ist T_ω eine Henkin Theorie und eine konservative Erweiterung von T.

Beweis.

(i) T_n ist konservative Erweiterung von T: Induktion über n

(ii) T_ω ist eine Theorie: Zeige $T_\omega \vdash \sigma \Rightarrow \sigma \in T_\omega$

(iii) T_ω ist eine Henkin Theorie.

(iv) T_ω ist konservative Erweiterung von T

$\square$

Korrolar für Konsistenz

Definition (Konsistenz)

Eine Formelmenge Γ ist **konsistent**, wenn $\Gamma \nvdash \perp$, und **inkonsistent**, wenn $\Gamma \vdash \perp$.

Corollary

T_ω ist konsistent falls T konsistent

Maximal Konsistente Theorien

Definition (Maximale Konsistenz)

Eine Menge von Aussagen Γ ist **maximal konsistent** gdw

(i) Γ ist konsistent

(ii) wenn $\Gamma \subseteq \Delta$ und Δ ist konsistent, dann ist $\Gamma = \Delta$

Maximal Konsistente Theorien

Definition (Maximale Konsistenz)

Eine Menge von Aussagen Γ ist **maximal konsistent** gdw

(i) Γ ist konsistent

(ii) wenn $\Gamma \subseteq \Delta$ und Δ ist konsistent, dann ist $\Gamma = \Delta$

Lemma (Lindenbaum (siehe auch Vorlesung vom 16.05.2023))

Jede konsistente Theorie ist Teil einer maximal konsistenten Theorie.

Beweis.

Beweis analog zu Lemma 1.21 vom 16.05 □

Modell-Existenz-Satz

Lemma (Modell-Existenz-Satz)

Falls Γ konsistente Formelmenge, dann hat Γ ein Modell.

Beweis.

- Sei $T := \{\varphi | \Gamma \vdash \varphi\}$ die Theorie von Γ
- Seit T_m eine maximal konsistente Henkin Erweiterung von T bzgl. der Signatur Σ_m
- Konstruktion des Term-Modells $\mathfrak{H}$ von T_m (kanonisches Modell, Herbrand Modell)
- Beweis, dass $\mathfrak{H} \models \varphi \Leftrightarrow T_m \vdash \varphi$
  - Strukturelle Induktion über φ

Also hat T_m ein Modell, genau dann wenn Γ konsistent ist. Somit hat auch Γ dann ein Modell (da $\Gamma \subseteq T_m$) $\square$

Konstruktion des Herbrand-Modells

Gegeben eine maximal konsistente Theorie T_m zur Signatur Σ_m
Definiere folgendes Modell $\mathfrak{H}$:

- Das Universum von H ist die Menge alle Grundterme über Σ_m
- Die Interpretation eines Funktionssymbols f^n ist eine n-stellige Funktion $f^{\mathfrak{H}} : \underbrace{H \times \cdots \times H}_{n} \to H$ definiert r alle $t_1, \ldots, t_n \in U$ durch:

$$f^{\mathfrak{H}}(t_1, \ldots, t_n) := f(t_1, \ldots, t_n)$$

- Die Interpretation eines Prädikatssymbols P^n ist eine n-stellige Relation $P^{\mathfrak{H}} \subseteq \underbrace{H \times \cdots \times H}_{n}$
  definiert für alle $t_1, \ldots, t_n \in H$ durch:

$$(t_1, \ldots, t_n) \in P^{\mathfrak{H}} \text{ gdw. } T_m \vdash P(t_1, \ldots, t_n)$$

Vollständigkeit

Theorem

Wenn $\Gamma \models \varphi$, *dann* $\Gamma \vdash \varphi$.

Beweis.

Wir zeigen $\Gamma \nvdash \varphi$ impliziert $\Gamma \not\models \varphi$. Wenn $\Gamma \nvdash \varphi$, dann ist $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ konsistent. Aus Modell-Existenz-Satz folgt, dass $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ein Modell $\mathfrak{H}$ hat. Daraus folgt dass $\mathfrak{H} \models \Gamma$ und $\mathfrak{H} \not\models \varphi$; also $\Gamma \not\models \varphi$. $\square$

Regeln für das natürliche Schließen mit Gleichheit

$$\frac{}{s = s}\ \mathit{refl} \qquad \frac{s = r}{r = s}\ \mathit{sym} \qquad \frac{r = s \quad s = t}{r = t}\ \mathit{trans}$$

$$\frac{r = s}{t[r/z] = t[s/z]}\ \mathit{substt} \qquad \frac{r = s \quad \phi[r/z]}{\phi[s/z]}\ \mathit{subst}$$

Gleichheit

- Gleichheit induziert Äquivalenzrelation auf Grundtermen
  a. $s \sim t$ gdw. $T_m \vdash s = t$
  b. wenn $s_i \sim t_i, 1 \leq i \leq n$ dann $f^{\mathfrak{H}}(s_1, \ldots, s_n) \sim f^{\mathfrak{H}}(t_1, \ldots, t_n)$.
  c. wenn $s_i \sim t_i, 1 \leq i \leq n$ und $(s_1, \ldots, s_n) \in P^{\mathfrak{H}}$, dann $(t_1, \ldots, t_n) \in P^{\mathfrak{H}}$

Gleichheit

- Gleichheit induziert Äquivalenzrelation auf Grundtermen
  - (a) $s \sim t$ gdw. $T_m \vdash s = t$
  - (b) wenn $s_i \sim t_i, 1 \leq i \leq n$ dann $f^{\mathfrak{H}}(s_1, \ldots, s_n) \sim f^{\mathfrak{H}}(t_1, \ldots, t_n)$.
  - (c) wenn $s_i \sim t_i, 1 \leq i \leq n$ und $(s_1, \ldots, s_n) \in P^{\mathfrak{H}}$, dann $(t_1, \ldots, t_n) \in P^{\mathfrak{H}}$
- Konstruktion des Herbrand-Modells muss verändert werden
- Bilde (Grund-)Terme t ab auf ihre Äquivalenzklasse

$$[t] := \{s | s \sim t\}$$

Gleichheit

- Gleichheit induziert Äquivalenzrelation auf Grundtermen
  a. $s \sim t$ gdw. $T_m \vdash s = t$
  b. wenn $s_i \sim t_i, 1 \leq i \leq n$ dann $f^{\mathfrak{H}}(s_1, \ldots, s_n) \sim f^{\mathfrak{H}}(t_1, \ldots, t_n)$.
  c. wenn $s_i \sim t_i, 1 \leq i \leq n$ und $(s_1, \ldots, s_n) \in P^{\mathfrak{H}}$, dann $(t_1, \ldots, t_n) \in P^{\mathfrak{H}}$
- Konstruktion des Herbrand-Modells muss verändert werden
- Bilde (Grund-)Terme t ab auf ihre Äquivalenzklasse

$$[t] := \{s | s \sim t\}$$

- Quotienten-Modell $\mathfrak{H}/_\sim$ besteht aus Äquivalenzklassen
  - Universum $U/_\sim := \{[t] | t \text{ ist Grundterm}\}$
  -

$$f^{\mathfrak{H}/\sim}([t_1], \ldots, [t_n]) := [f(t_1, \ldots, t_n)]$$
$$([t_1], \ldots, [t_n]) \in P^{\mathfrak{H}/\sim} \text{ gdw. } (t_1, \ldots, t_n) \in P^{\mathfrak{H}}$$

Gleichheit

- Gleichheit induziert Äquivalenzrelation auf Grundtermen
  - a $s \sim t$ gdw. $T_m \vdash s = t$
  - b wenn $s_i \sim t_i, 1 \leq i \leq n$ dann $f^{\mathfrak{H}}(s_1, \dots, s_n) \sim f^{\mathfrak{H}}(t_1, \dots, t_n)$.
  - c wenn $s_i \sim t_i, 1 \leq i \leq n$ und $(s_1, \dots, s_n) \in P^{\mathfrak{H}}$, dann $(t_1, \dots, t_n) \in P^{\mathfrak{H}}$
- Konstruktion des Herbrand-Modells muss verändert werden
- Bilde (Grund-)Terme t ab auf ihre Äquivalenzklasse

$$[t] := \{s | s \sim t\}$$

- Quotienten-Modell $\mathfrak{H}/_\sim$ besteht aus Äquivalenzklassen
  - Universum $U/_\sim := \{[t] | t \text{ ist Grundterm}\}$
  -

$$f^{\mathfrak{H}/\sim}([t_1], \dots, [t_n]) := [f(t_1, \dots, t_n)]$$
$$([t_1], \dots, [t_n]) \in P^{\mathfrak{H}/\sim} \text{ gdw. } (t_1, \dots, t_n) \in P^{\mathfrak{H}}$$

- Alles andere läßt sich entsprechend übertragen, um den Modell-Existenz-Satz zu zeigen.

Kompaktheitssatz

Theorem (Kompatkheitssatz)

Eine Formelmenge Γ hat ein Modell gdw. jede endliche Teilmenge Δ von Γ hat ein Modell.

Beweis.

Eine Äquivalente Formulierung lautet:

Eine Formelmenge Γ hat kein Modell gdw. mindestens eine endliche Teilmenge Δ von Γ hat kein Modell.

- $\Rightarrow$:
- $\Leftarrow$:

$\square$