Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 20 vom 29.06.23

Prädikatenlogik VIII

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2023

Ein Beweis?

10.1

$$
\dfrac{
\dfrac{[\forall x.\, A \vee B]_1}{A \vee B[x/x] \equiv A \vee B}\;\forall E
\qquad
\dfrac{\dfrac{[A]_2}{\forall x.\, A}\;\forall I}{(\forall x.\, A) \vee (\forall x.\, B)}\;\vee I_L
\qquad
\dfrac{\dfrac{[B]_3}{\forall x.\, B}\;\forall I}{(\forall x.\, A) \vee (\forall x.\, B)}\;\vee I_R
}{
\dfrac{(\forall x.\, A) \vee (\forall x.\, B)}{(\forall x.\, A \vee B) \longrightarrow (\forall x.\, A) \vee (\forall x.\, B)}\;\rightarrow I_1
}\;\vee E_{2,3}
$$

Ein mathematischer Beweis

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Annahme: } \sqrt{2} \text{ ist rational} & A \\
\iff & \sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ und } p, q \text{ teilerfremd} & B_1 \wedge C \\
\iff & 2 = \frac{p^2}{q^2} & B_2 \\
\iff & p^2 = 2q^2 \ (p^2 \text{ gerade}) & B_3 \\
\iff & p = 2r \ (p \text{ gerade}) & B_4 \\
\iff & p^2 = 4r^2 & B_5 \\
\iff & 2q^2 = 4r^2 & B_6 \\
\iff & q^2 = 2r^2 \ (q^2 \text{ gerade}) & B_7 \\
\iff & q \text{ gerade} & B_8 \\
\iff & p \text{ und } q \text{ gerade, also sind } p \text{ und } q \text{ nicht teilerfremd} & \neg C \\
 & \text{Widerspruch } \lightning & \bot \\
 & \text{Also ist } \sqrt{2} \text{ irrational} & \neg A
\end{array}
$$

Regeln für das natürliche Schließen

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \longrightarrow B}\ {\longrightarrow}I \qquad \dfrac{A \quad A \longrightarrow B}{B}\ mp \qquad \dfrac{\bot}{A}\ \mathit{false} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{A}\ raa$$

$$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\ {\wedge}I \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\ {\wedge}E_L \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\ {\wedge}E_R$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\ {\neg}I \qquad \dfrac{A \quad \neg A}{\bot}\ {\neg}E \qquad \dfrac{A}{A \vee B}\ {\vee}I_L \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\ {\vee}I_R \qquad \dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ {\vee}E$$

Regeln für das natürliche Schließen

$$\frac{\phi}{\forall x.\,\phi}\ \forall I \quad (*) \qquad \frac{\forall x.\,\phi}{\phi[t/x]}\ \forall E \qquad \frac{\phi[t/x]}{\exists x.\,\phi}\ \exists I \qquad \frac{\exists x.\,\phi \qquad \begin{matrix}[\phi]\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\psi}\ \exists E(*)$$

Eigenvariablenbedingung (*): x ist nicht frei in einer offenen Hypothese

Eigenvariablenbedingung (*): x ist nicht frei in einer offenen Hypothese (außer natürlich ϕ) der Ableitung.