Einführung in die Formale Logik
Vorlesung 19 vom 27.06.23
Prädikatenlogik VII

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2023

Regeln für das natürliche Schließen

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \longrightarrow B} \longrightarrow I \qquad \dfrac{A \quad A \longrightarrow B}{B}\ mp \qquad \dfrac{\bot}{A}\ \mathit{false} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{A}\ raa$$

$$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I \qquad \dfrac{A \wedge B}{A} \wedge E_L \qquad \dfrac{A \wedge B}{B} \wedge E_R$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A} \neg I \qquad \dfrac{A \quad \neg A}{\bot} \neg E \qquad \dfrac{A}{A \vee B} \vee I_L \qquad \dfrac{B}{A \vee B} \vee I_R \qquad \dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C} \vee E$$

Regeln für das natürliche Schließen

$$\frac{\phi}{\forall x.\,\phi}\;\forall I \quad (*) \qquad\qquad \frac{\forall x.\,\phi}{\phi[t/x]}\;\forall E \qquad\qquad \frac{\phi[t/x]}{\exists x.\,\phi}\;\exists I \qquad\qquad \frac{\exists x.\,\phi \qquad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\psi}\;\exists E(*)$$

Eigenvariablenbedingung (*): x ist nicht frei in einer offenen Hypothese

Eigenvariablenbedingung (*): x ist nicht frei in einer offenen Hypothese (außer natürlich ϕ) der Ableitung.

Übungen

Beweist folgendes Theorem im Kalkül des natürlichen Schließens:

$$\left[\begin{array}{l}(\forall x.\forall y.(\mathrm{Raum}(x) \wedge \mathrm{Lampe}(y) \wedge \mathrm{In}(y,x) \wedge \mathrm{An}(y)) \implies \mathrm{Beleuchtet}(x)) \\ \wedge\, \mathrm{Raum}(r_1) \wedge \mathrm{Lampe}(l_1) \wedge \mathrm{In}(l_1, r_1) \wedge \mathrm{An}(l_1)\end{array}\right] \implies \mathrm{Beleuchtet}(r_1)$$

Übungen

Beweist folgendes Theorem im Kalkül des natürlichen Schließens:

$$\left[\begin{array}{l}(\forall x.\forall y.(\mathrm{Raum}(x) \wedge \mathrm{Lampe}(y) \wedge \mathrm{In}(y,x) \wedge \mathrm{An}(y)) \implies \mathrm{Beleuchtet}(x)) \\ \wedge\, \mathrm{Raum}(r_1) \wedge \mathrm{Lampe}(l_1) \wedge \mathrm{In}(l_1, r_1) \wedge \mathrm{An}(l_1)\end{array}\right] \implies \mathrm{Beleuchtet}(r_1)$$

Wie sieht der Beweis für folgendes Theorem aus?

$$\left[\begin{array}{l}(\forall x.\forall y.(\mathrm{Raum}(x) \wedge \mathrm{Lampe}(y) \wedge \mathrm{In}(y,x) \wedge \mathrm{An}(y)) \implies \mathrm{Beleuchtet}(x)) \\ \wedge\, \mathrm{Raum}(r_1) \wedge (\exists z.\, \mathrm{Lampe}(z) \wedge \mathrm{In}(z, r_1) \wedge \mathrm{An}(z))\end{array}\right] \implies \mathrm{Beleuchtet}(r_1)$$

Regeln für das natürliche Schließen mit Gleichheit

$$\frac{}{s = s}\ \mathit{refl} \qquad \frac{s = r}{r = s}\ \mathit{sym} \qquad \frac{r = s \quad s = t}{r = t}\ \mathit{trans}$$

$$\frac{r = s}{t[r/z] = t[s/z]}\ \mathit{substt} \qquad \frac{r = s \quad \phi[r/z]}{\phi[s/z]}\ \mathit{subst}$$

Übung: Beweist folgendes im Kalkül des natürlichen Schließens:

- $\{\mathit{refl}, \mathit{subst}\} \vdash \mathit{sym}$
- $\{\mathit{refl}, \mathit{subst}\} \vdash \mathit{trans}$