Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 17 vom 13.06.23

Prädikatenlogik V

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2023

Resolution für AL – Erinnerung

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A \lor P \arrow[dr, dash] & & \neg P \lor B \arrow[dl, dash] \\
& A \lor B &
\end{tikzcd}$$

Resolution für FO ?

$$\forall x, y, z. A(f(x, y)) \vee P(g(z, y)) \qquad\qquad \forall y, z. \neg P(g(z, y)) \vee B(h(0))$$

$$\forall x, y, z. A(f(x, y)) \vee B(h(0))$$

Resolution für FO ?

$\forall x, y, z. A(f(x,y)) \lor P(g(z,y))$

$\forall v, w. \neg P(g(w,v)) \lor B(h(0))$

$???\forall x, y. A(f(x,y)) \lor B(h(0))???$

Resolution für FO ?

$$\forall x, y, z. A(f(x, y)) \lor P(g(z, \underline{h(y)}))$$

$$\forall v, w. \neg P(g(\underline{h(w)}, v)) \lor B($$

$$???\forall x, y. A(f(x, y)) \lor B(h(0))???$$

FO Klausel

Definition (Klauselmenge)

Sei Φ eine Menge von Formeln. Bilde aus $\bigwedge \Phi$ mittels PNF, NNF und Skolemisierung eine Formel der Form

$$(\forall x_1^1 \dots \forall x_1^{n_1} . L_1^1 \vee \dots \vee L_1^{k_1}) \wedge \dots \wedge (\forall x_m^1 \dots \forall x_m^{n_m} . L_m^1 \vee \dots \vee L_m^{k_m})$$

so dass alle L_i^j Literale sind.
Dann sind die Mengen $\{L_i^1, \dots, L_i^{k_i}\}$ eine Menge von FO-Klauseln zu Φ.

Anmerkung:

- Die Variablen in den Kauseln sind voneinander unabhängig, da $\forall$-quantifiziert.
- D.h. Variablen mit dem selben Namen in unterschiedlichen Klauseln sind <u>ungleiche</u> Variablen.

Resolution für FO ?

$\forall x, y, z. A(f(x,y)) \vee P(g(z,y))$ $\qquad\qquad$ $\forall v, w. \neg P(g(w,v)) \vee B(h(0))$

$$???\forall x, y. A(f(x,y)) \vee B(h(0))???$$

Resolution für FO ?

$$\{A(f(x,y)), P(g(z,y))\} \qquad\qquad \{\neg P(g(w,v)), B(h(0))\}$$

$$\{A(f(x,y)), B(h(0))\}$$

Resolution für FO ?

$$\{A(f(x,y)), \underline{P(g(z,y))}\} \qquad\qquad \{\underline{\neg P(g(w,v))}, B(h(0))\}$$

$$\{A(f(x,y)), B(h(0))\}$$

Resolution für FO ?

$$\{A(f(x,y)), \underline{P(g(z,y))}\} \qquad \{\underline{\neg P(g(w,v))}, B(h(0))\}$$

$$\{A(f(x,y)), B(h(0))\}$$

- Wir brauchen eine Möglichkeit syntaktisch ungleiche atomare Formeln durch Einsetzung geeigneter Terme in die freien Variablen gleich zu machen.

Substitution

Eine Substitution beschreibt die Ersetzung einer (freien) Variable in einem Term bzw. einer Formel durch einen Term.

Definition

Seien $x_1, \ldots, x_n$ endlich viele Variablen und $t_1, \ldots, t_n$ τ-Terme, in denen kein x_i vorkommt. Dann ist $\sigma = [t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$ eine Substitution. Die Domäne von σ ist $\mathrm{dom}(\sigma) = \{x_1 \ldots x_n\}$. Die Bild eines Terms unter σ ist definiert als

$$\sigma(x) := \begin{cases} t_i & \text{falls } x = x_i \text{ für ein } 1 \leq i \leq n \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\sigma(f(s_1, \ldots, s_m)) := f(\sigma(s_1), \ldots, \sigma(s_m))$$

Die Variablen einer Substitution sind $\mathrm{Var}(\sigma) := \mathrm{dom}(\sigma) \cup \mathrm{frei}(t_1) \cup \ldots \mathrm{frei}(t_n)$

Substitution

Das Bild einer FO-Formel unter einer Substitution σ ist wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\sigma(P(t_1,\ldots,t_n)) &:= P(\sigma(t_1),\ldots,\sigma(t_n)) \\
\sigma(\varphi \circ \psi) &:= \sigma(\varphi) \circ \sigma(\psi) && \text{für } \circ\{\wedge, \vee, \longrightarrow, \leftrightarrow\} \\
\sigma(Qx.\varphi(x)) &:= Qu.\sigma(\varphi(u)) && \text{mit } Q \in \{\forall, \exists\} \text{ und } u \notin \mathrm{Var}(\sigma)
\end{aligned}
$$

Übung

Gegeben folgende Substitution $\sigma = [f(g(y), z)/x, h(g(a))/u]$ mit $\mathrm{Var}(\sigma) = \{x, y, z, u\}$.
Rechnen Sie folgende Substitutionen aus:

1. $\sigma(f(x, u)) =?$
2. $\sigma(f(x, y)) =?$
3. $\sigma(P(x, u) \longrightarrow Q(u, x)) =$
4. $\sigma(\forall u.(P(x, u) \longrightarrow Q(u, x))) =?$
5. $\sigma(\forall z.(P(x, u) \vee Q(u, x))) =?$

Substitution: Eigenschaften

Lemma (Idempotenz)

Sei σ eine Substitution. Dann gilt:

- *Für alle Terme t: $\sigma(\sigma(t)) = \sigma(t)$*
- *Für alle Formeln φ gilt: $\sigma(\sigma(\varphi)) \equiv \sigma(\varphi)$ (warum nicht $=$?)*

Substitution: Eigenschaften

Lemma (Idempotenz)

Sei σ eine Substitution. Dann gilt:

- *Für alle Terme t: $\sigma(\sigma(t)) = \sigma(t)$*
- *Für alle Formeln φ gilt: $\sigma(\sigma(\varphi)) \equiv \sigma(\varphi)$ (warum nicht $=$?)*

Lemma (Substitutionslemma)

Sei $\sigma = [t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$ eine Substitution und $(\mathfrak{A}, \beta)$ eine Interpretation. Dann gelten:

1. *Für alle Terme t:*

$$[\![\sigma(t)]\!]_{\mathfrak{A}}^{\beta} = [\![t]\!]_{\mathfrak{A}}^{\beta[[\![t_1]\!]_{\mathfrak{A}}^{\beta}/x_1, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathfrak{A}}^{\beta}/x_n]}$$

2. *Für alle Formeln φ gilt:*

$$\mathfrak{A}, \beta \models \sigma(\varphi) \text{ gdw. } \mathfrak{A}, \beta[[\![t_1]\!]_{\mathfrak{A}}^{\beta}/x_1, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathfrak{A}}^{\beta}/x_n] \models \varphi$$

Resolution für FO ?

$$\{A(f(x,y)), \underline{P(g(z,y))}\} \qquad\qquad \{\underline{\neg P(g(w,v))}, B(h(0))\}$$

$$\{A(f(x,y)), B(h(0))\}$$

- Wir brauchen eine Möglichkeit syntaktische ungleiche atomare Formeln durch Einsetzung geeigneter Terme in die freien Variablen gleich zu machen.

Resolution für FO ?

$$\{A(f(x,y)), \underline{P(g(z,y))}\} \qquad\qquad \{\underline{\neg P(g(w,v))}, B(h(0))\}$$

$$\{A(f(x,y)), B(h(0))\}$$

- Wir brauchen eine Möglichkeit syntaktische ungleiche atomare Formeln durch Einsetzung geeigneter Terme in die freien Variablen gleich zu machen.
- Wähle $\sigma = [w/z, v/y]$ und wende σ auf beide Klauseln an.

Resolution für FO - Mittels Substitution zurückgeführt auf AL-Resolution

$$\{A(f(x,\underline{v})), \underline{P(g(w,v))}\} \qquad \{\underline{\neg P(g(w,v))}, B(h(0))\}$$

$$\{A(f(x,\underline{v})), B(h(0))\}$$

- Wir brauchen eine Möglichkeit syntaktische ungleiche atomare Formeln durch Einsetzung geeigneter Terme in die freien Variablen gleich zu machen.
- Wähle $\sigma = [z/w, y/v]$ und wende σ auf beide Klauseln an.

Resolution für FO - Mittels Substitution zurückgeführt auf AL-Resolution

$$\{A(f(x,\underline{v})), \underline{P(g(w,v))}\} \qquad\qquad \{\underline{\neg P(g(w,v))}, B(h(0))\}$$

$$\{A(f(x,\underline{v})), B(h(0))\}$$

- Wir brauchen eine Möglichkeit syntaktische ungleiche atomare Formeln durch Einsetzung geeigneter Terme in die freien Variablen gleich zu machen.
- Wähle $\sigma = [z/w, y/v]$ und wende σ auf beide Klauseln an.
- Kann man Substitutionen berechnen ?

Übung

- Geben Sie durch geeignete Wahl einer Substitution die möglichen Resolventen folgender Klausel-Paare an

- Führen Sie ggf. notwendige Umbenennungen der Variablen in unterschedlichen Klauseln durch

1. $\{A(x), \neg B(y, x)\}$ und $\{\neg A(z), C(c)\}$

2. $\{A(x), \neg B(x, a)\}$ und $\{\neg A(b), B(a, x)\}$

3. $\{A(x, f(x))\}$ und $\{\neg A(g(z), z)\}$

Unifikator

Definition (Unifikator)

Gegeben zwei atomare Formeln A und A'. Ein Unifikator von A und A' ist eine Substitution σ mit $\mathrm{Var}(\sigma) \subseteq \mathrm{frei}(A) \cup \mathrm{frei}(A')$, so dass gilt: $\sigma(A) = \sigma(A')$.

$$\mathrm{Unif}(A, A') := \{\sigma | \sigma(A) = \sigma(A'), \mathrm{Var}(\sigma) \subseteq \mathrm{frei}(A) \cup \mathrm{frei}(A')\}$$

Unifikator

Definition (Unifikator)

Gegeben zwei atomare Formeln A und A'. Ein Unifikator von A und A' ist eine Substitution σ mit $\mathrm{Var}(\sigma) \subseteq \mathrm{frei}(A) \cup \mathrm{frei}(A')$, so dass gilt: $\sigma(A) = \sigma(A')$.

$$\mathrm{Unif}(A, A') := \{\sigma | \sigma(A) = \sigma(A'), \mathrm{Var}(\sigma) \subseteq \mathrm{frei}(A) \cup \mathrm{frei}(A')\}$$

Ein Unifikator σ ist ein allgemeinster Unifikator, wenn für alle anderen Unifikatoren τ gilt, dass es eine Substitution ρ gibt, so dass $\tau = \rho \circ \sigma$.[a]

$$\mathrm{mgu}(A, A') := \{\sigma \mid \forall \tau \in \mathrm{Unif}(A, A').\exists \rho.\tau = \rho \circ \sigma\}$$

[a] Def.: $\tau = \rho \circ \sigma$ gdw. für alle Terme t (resp. Formeln φ) gilt $\tau(t) = \rho(\sigma(t))$ (resp. $\tau(\varphi) = \rho(\sigma(\varphi))$).

Eigenschaften

Definition

Eine Substitution $\sigma = [t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$ ist eine Umbenennung gdw. alle t_i Variablen sind.

Lemma

Gegeben zwei atomare Formeln A und A'.

- *Alle allgemeinsten Unifikatoren sind gleich bis auf Umbenennung der Variablen.*

$$\text{Für alle } \sigma, \sigma' \in \mathrm{mgu}(A, A') \text{ existiert Umbenennung } \tau \text{ sodass } \sigma = \tau \circ \sigma' \text{ und } \sigma' = \tau \circ \sigma$$

Unifikation (Martelli/Montanari 1982)

$$\frac{M \uplus \{R(s_1,\ldots,s_n) \triangleq R(t_1,\ldots,t_n)\}\ ,\ R \text{ Relationssymbol}}{M \uplus \{s_1 \triangleq t_1,\ldots,s_n \triangleq t_n\}}$$

$$\frac{M \uplus \{f(s_1,\ldots,s_n) \triangleq f(t_1,\ldots,t_n)\}\ ,\ f \text{ Funktionssymbol}}{M \uplus \{s_1 \triangleq t_1,\ldots,s_n \triangleq t_n\}}$$

$$\frac{M \uplus \{t \triangleq x\} \text{ falls } x \text{ Variable, } t \text{ keine Variable}}{M \uplus \{x \triangleq t\}}$$

$$\frac{M \uplus \{x \triangleq t\} \text{ falls } x \text{ Variable die in } t \text{ nicht vorkommt}}{M[t/x] \uplus \{x \triangleq t\}}$$

- M ist in gelöster Form, wenn alle Elemente von M der Form $x \triangleq t$ sind und x kommt nur einmal vor in M.
- Wenn M in gelöster Form, kann daraus ein allgemeinster Unifikator abgelesen werden
- Wenn M nicht in gelöster Form ist und keine Regelanwendung mehr möglich ist, dann ist das Unifikationsproblem nicht lösbar.

Übung

Bestimmt die Unifikatoren folgender atomaren Formeln:

- $R(x, g(u))$ und $R(f(y), y)$

- $R(g(x), x, h(x))$ und $R(z, z, z)$

- $R(g(x), x, h(y))$ und $R(z, h(z), u)$

Resolvente

Definition (Resolvente)

Gegeben zwei Klauseln $\{L_1, \ldots, L_n, L\}$, $\{\neg L', L'_1, \ldots, L'_m\}$ und sei $\sigma \in \text{mgu}(L, L')$. Dann ist $\{\sigma(L_1), \ldots, \sigma(L_n), \sigma(L'_1), \ldots, \sigma(L'_m)\}$ eine <u>Resolvente</u>.

$$\{L_1, \ldots, L_n, L\} \qquad\qquad \{\neg L', L'_1, \ldots, L'_m\}$$

$$\{\sigma(L_1), \ldots, \sigma(L_n), \sigma(L'_1), \ldots, \sigma(L'_m)\}$$

Faktorisierung

Definition (Faktorisierung)

Gegeben Klauseln $\{L_1, \ldots, L_n, L, L'\}$, und sei $\sigma \in \mathrm{mgu}(L, L')$. Dann ist $\{\sigma(L_1), \ldots, \sigma(L_n), \sigma(L)\}$ eine Faktorisierung.

Resolvente

Lemma (Korrektheit Resolvente)

Gegeben zwei Klauseln $C_1 = \{L_1, \ldots, L_n, L\}$, $C_2 = \{\neg L', L'_1, \ldots, L'_m\}$, $\sigma \in \mathrm{mgu}(L, L')$ *und die Resolvente* $C = \{\sigma(L_1), \ldots, \sigma(L_n), \sigma(L'_1), \ldots, \sigma(L'_m)\}$. *Für alle Interpretationen* $(\mathfrak{A}, \beta)$ *gilt:*

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models C_i, i = 1, 2 \textit{ impliziert } (\mathfrak{A}, \beta) \models C$$

Beweis:

1. $(\mathfrak{A}, \beta) \models C_i, i = 1, 2$ impliziert $(\mathfrak{A}, \beta) \models \sigma(C_i), i = 1, 2$
2. $(\mathfrak{A}, \beta) \models \sigma(C_i), i = 1, 2$ impliziert $(\mathfrak{A}, \beta) \models \sigma(C)$
3. Per Fallunterscheidung über $(\mathfrak{A}, \beta) \models \sigma(L)$

Korrektheit Faktorisierung analog (1)

Resolutionskalkül

Lemma (Resolutionslemma)

Sei M eine Klauselmenge, $C_1, C_2 \in M$ und C Resolvente von C_1 und C_2. Dann ist gilt $M \approx M \cup \{C\}$.

Definition (Resolution Res)

Für jede Klauselmenge M sei:

- $\mathrm{Res}(M) := M \cup \{C \mid C \text{ Resolvente zweier Klauseln aus } M\}$
- $\mathrm{Res}^0(M) := M$
- $\mathrm{Res}^{i+1}(M) := \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(M))$
- $\mathrm{Res}^*(M) := \bigcup_{i \geq 0} \mathrm{Res}^i(M)$

Resolutionssatz

Theorem (Resolutionssatz, Robinson, 1965)

Eine endliche Klauselmenge M ist unerfüllbar gdw. $\square \in \mathrm{Res}^*(M)$.

- Wenn für ein gegebenes M ein n existiert, so dass $\mathrm{Res}^n(M) = \mathrm{Res}^{n+1}(M)$ dann ist $\mathrm{Res}^n(M)$ saturiert.

Beispielbeweis

1. $P(x), P(f(a)), \neg Q(z)$	*Gegeben*
2. $\neg P(y)$	*Gegeben*
3. $P(g(u,v)), Q(v)$	*Gegeben*
4. $Q(v)$	*Res* 2, 3 *mit* $[g(u,v)/y]$

Übung

- Widerlegt oder saturiert folgende Klauselmenge

1.	$\neg \mathrm{Raum}(x), \neg \mathrm{Lampe}(y),$	
	$\neg \mathrm{In}(y, x), \neg \mathrm{An}(y), \mathrm{Beleuchtet}(x)$	*Gegeben*
2.	$\mathrm{Raum}(r_1)$	*Gegeben*
3.	$\mathrm{Lampe}(l_1)$	*Gegeben*
4.	$\mathrm{An}(l_1)$	*Gegeben*
6.	$\mathrm{Lampe}(l_2)$	*Gegeben*
7.	$\neg \mathrm{An}(l_2)$	*Gegeben*
8.	$\mathrm{Lampe}(l_1)$	*Gegeben*
9.	$\mathrm{In}(l_1, r_1)$	*Gegeben*
10.	$\mathrm{In}(l_2, r_1)$	*Gegeben*
11.	$\neg \mathrm{Beleuchtet}(r_1)$	*Gegeben*

Übung

- Gegeben folgende Klauselmenge $M = \{\text{Gerade}(0)\}, \{\neg\,\text{Gerade}(x), \text{Gerade}(\text{Nf}(\text{Nf}(x)))\}$. Berechnet $\text{Res}^5(M)$.

- Was könnt ihr beobachten?

Resolutionssatz

Theorem (Resolutionssatz, Robinson, 1965)

Eine endliche Klauselmenge M ist unerfüllbar gdw. $\square \in \mathrm{Res}^*(M)$.

- Wenn M unerfüllbar ist, dann wird $\square$ irgendwann gefunden
- Wenn M erfüllbar ist, dann 'terminiert' Res eventuell nicht.

Semi-Entscheidbarkeit der FO-Logik

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{Formelmenge } \Phi \\
\overset{\mathit{PNF}}{\Longleftrightarrow} & \text{Formelmengen in Pränexnormalform } \{Q_1 x_1 . Q_2 x_2 . \ldots Q_n x_n . \varphi\} \\
\overset{\mathit{NNF}}{\Longleftrightarrow} & \text{Formelmenge in PNF und NNF } \{Q_1 x_1 . Q_2 x_2 . \ldots Q_n x_n . \text{NNF}\} \\
\overset{\mathit{Skolemisierung}}{\Longrightarrow} & \text{Skolemisierte Formelmenge in PNF und NNF } \{\forall x_1 . \forall x_2 . \ldots \forall x_n . \text{NNF}\} \\
\overset{\text{DeMorgan}}{\Longleftrightarrow} & \text{Skolemisierte Formelmenge in PNF und DNF } \{\forall x_1 . \forall x_2 . \ldots \forall x_n . \text{DNF}\} \\
\overset{\text{Distr. } \forall \text{ über } \wedge}{\Leftrightarrow} & \left.\text{Menge } M \text{ von } \forall\text{-quantifizierten, skolemisierten Disjunktionen}\right\} \text{Klauselmenge}
\end{array}
$$

Semi-Entscheidbarkeit der FO-Logik

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{Formelmenge } \Phi \\
\overset{\textit{PNF}}{\Longleftrightarrow} & \text{Formelmengen in Pränexnormalform } \{Q_1 x_1.Q_2 x_2.\dots Q_n x_n.\varphi\} \\
\overset{\textit{NNF}}{\Longleftrightarrow} & \text{Formelmenge in PNF und NNF } \{Q_1 x_1.Q_2 x_2.\dots Q_n x_n.\text{NNF}\} \\
\overset{\textit{Skolemisierung}}{\Longrightarrow} & \text{Skolemisierte Formelmenge in PNF und NNF } \{\forall x_1.\forall x_2.\dots\forall x_n.\text{NNF}\} \\
\overset{\text{DeMorgan}}{\Longleftrightarrow} & \text{Skolemisierte Formelmenge in PNF und DNF } \{\forall x_1.\forall x_2.\dots\forall x_n.\text{DNF}\} \\
\overset{\text{Distr. } \forall \text{ über } \wedge}{\Longleftrightarrow} & \left.\text{Menge } M \text{ von } \forall\text{-quantifizierten, skolemisierten Disjunktionen}\right\}\text{Klauselmenge}
\end{array}
$$

- Wenn M unerfüllbar, dann finden wir mittels Resolution eine leere Klausel $\Box$
- Dann war auch Φ unerfüllbar.
- Falls Φ erfüllbar, terminiert der Resolutionskalkül eventuell nicht.
- FO-Logik ist <u>semi-entscheidbar</u>

FO-Beweisen mit Resolutionskalkül

- Gegeben eine Menge von Axiomen Φ und eine zu beweisende Eigenschaft φ.
- Zum Beweis mittels Resolution Res:
  - Bilde Klauselmenge M aus $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$
  - Berechne $\mathrm{Res}^*(M)$:
    - Falls für ein $i \geq 0$ $\square \in \mathrm{Res}^i(M)$, dann war $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar und es gilt $\Phi \models \varphi$
    - Falls für ein $i \geq 0$ $Res^i(M)$ saturiert, dann war $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ erfüllbar
    - Solange weder $\square$ gefunden noch eine saturiert Klauselmenge gebildet wurde, wissen wir nichts.