Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 16 vom 08.06.23

Prädikatenlogik IV

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2023

Skolem-Normalform

Theorem

Zu jeder σ-Formel ψ läßt sich eine τ-Formel φ mit $\sigma \subseteq \tau$ konstruieren, so dass gilt:

1. $\varphi = \forall x_1. \dots .\forall x_n.\varphi'$ *und* φ' *ist quantorenfrei*
2. $\varphi \models \psi$
3. *Zu jedem Modell* $\mathfrak{A}$ *von* ψ *existiert eine Struktur* $\mathfrak{A}'$, *welche Modell von* φ *ist.*

Beweis.

1. Konstruktion von φ' durch Skolemisierung
2. Beweis $\models \varphi \longrightarrow \psi$
3. Zu jedem Modell von ψ existiert ein Modell, welches Modell von φ ist.

$\square$

Skolemisierung

- Skolemfunktion muss einzig sein, damit man die Interpretation frei wählen kann
- Folge:
  - Pro Existenzquantor, der skolemisiert wird ein eindeutiges, neues Funktionssymbol
  - Gilt insbesondere auch bei Skolemisierung von Formelmengen

Übung

Zu jeder der folgenden Formeln gebt eine skolemisierte Formel anderen

- $\exists n. \forall m. n \neq s(m)$
- $\exists x. R(x, x) \vee \exists x. \forall y. (\neg R(x, y) \vee (R(y, y) \vee \forall y. \neg R(y, x)))$
- $\forall y. \forall x. (\neg R(x, y) \vee \exists z. \neg (S(x, z) \longrightarrow R(y, y)))$

Skolemisierung

- Skolemisierung einer Formelmenge Φ zu Φ'
- Implikation gilt von rechts nach links: $\Phi' \models \Phi$
- Von links nach rechts bleibt 'nur' Erfüllbarkeit erhalten
  - Wenn Φ erfüllbar, dann ist auch Φ' erfüllbar
  - Was können wir damit machen?

Skolemisierung

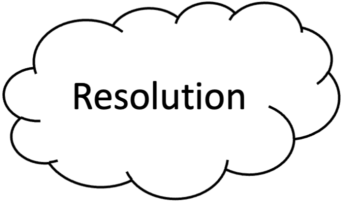
- Skolemisierung einer Formelmenge Φ zu Φ'
- Implikation gilt von rechts nach links: $\Phi' \models \Phi$
- Von links nach rechts bleibt ‘nur’ Erfüllbarkeit erhalten
  - Wenn Φ erfüllbar, dann ist auch Φ' erfüllbar
  - Was können wir damit machen?
- Wenn wir Φ' als wahr beweisen sagt uns das nichts über Φ

Skolemisierung

- Skolemisierung einer Formelmenge Φ zu Φ'
- Implikation gilt von rechts nach links: $\Phi' \models \Phi$
- Von links nach rechts bleibt 'nur' Erfüllbarkeit erhalten
  - Wenn Φ erfüllbar, dann ist auch Φ' erfüllbar
  - Was können wir damit machen?
- Wenn wir Φ' als wahr beweisen sagt uns das nichts über Φ
- Wenn wir Φ' wiederlegen (unerfüllbar), dann ist auch Φ unerfüllbar

Skolemisierung

- Skolemisierung einer Formelmenge Φ zu Φ'
- Implikation gilt von rechts nach links: $\Phi' \models \Phi$
- Von links nach rechts bleibt ‘nur’ Erfüllbarkeit erhalten
  - Wenn Φ erfüllbar, dann ist auch Φ' erfüllbar
  - Was können wir damit machen?
- Wenn wir Φ' als wahr beweisen sagt uns das nichts über Φ
- Wenn wir Φ' wiederlegen (unerfüllbar), dann ist auch Φ unerfüllbar



Umformungen

Formelmenge

$\overset{PNF}{\Longleftrightarrow}$ Formelmengen in Pränexnormalform $\{Q_1 x_1 . Q_2 x_2 . \dots Q_n x_n . \varphi\}$

Umformungen

Formelmenge

$\overset{PNF}{\Longleftrightarrow}$ Formelmengen in Pränexnormalform $\{Q_1x_1.Q_2x_2.\ldots Q_nx_n.\varphi\}$

$\overset{NNF}{\Longleftrightarrow}$ Formelmenge in PNF und NNF $\{Q_1x_1.Q_2x_2.\ldots Q_nx_n.\mathrm{NNF}\}$

Umformungen

$$
\begin{aligned}
& \text{Formelmenge} \\
\overset{PNF}{\iff}\ & \text{Formelmengen in Pränexnormalform } \{Q_1 x_1.Q_2 x_2.\dots Q_n x_n.\varphi\} \\
\overset{NNF}{\iff}\ & \text{Formelmenge in PNF und NNF } \{Q_1 x_1.Q_2 x_2.\dots Q_n x_n.\text{NNF}\} \\
\overset{Skolemisierung}{\Longrightarrow}\ & \text{Skolemisierte Formelmenge in PNF und NNF } \{\forall x_1.\forall x_2.\dots \forall x_n.\text{NNF}\}
\end{aligned}
$$

Umformungen

$$
\begin{aligned}
& \text{Formelmenge} \\
\overset{PNF}{\Longleftrightarrow}\ & \text{Formelmengen in Pränexnormalform } \{Q_1x_1.Q_2x_2.\ldots Q_nx_n.\varphi\} \\
\overset{NNF}{\Longleftrightarrow}\ & \text{Formelmenge in PNF und NNF } \{Q_1x_1.Q_2x_2.\ldots Q_nx_n.\text{NNF}\} \\
\overset{Skolemisierung}{\Longrightarrow}\ & \text{Skolemisierte Formelmenge in PNF und NNF } \{\forall x_1.\forall x_2.\ldots\forall x_n.\text{NNF}\} \\
\overset{\text{DeMorgan}}{\Longleftrightarrow}\ & \text{Skolemisierte Formelmenge in PNF und DNF } \{\forall x_1.\forall x_2.\ldots\forall x_n.\text{DNF}\}
\end{aligned}
$$

Umformungen

$$
\begin{aligned}
& \text{Formelmenge} \\
\overset{PNF}{\Longleftrightarrow}\; & \text{Formelmengen in Pränexnormalform } \{Q_1 x_1 . Q_2 x_2 . \ldots Q_n x_n . \varphi\} \\
\overset{NNF}{\Longleftrightarrow}\; & \text{Formelmenge in PNF und NNF } \{Q_1 x_1 . Q_2 x_2 . \ldots Q_n x_n . \mathrm{NNF}\} \\
\overset{Skolemisierung}{\Longrightarrow}\; & \text{Skolemisierte Formelmenge in PNF und NNF } \{\forall x_1 . \forall x_2 . \ldots \forall x_n . \mathrm{NNF}\} \\
\overset{\text{DeMorgan}}{\Longleftrightarrow}\; & \text{Skolemisierte Formelmenge in PNF und DNF } \{\forall x_1 . \forall x_2 . \ldots \forall x_n . \mathrm{DNF}\} \\
\overset{\text{Distr. } \forall \text{ über } \wedge}{\Leftrightarrow}\; & \text{Menge von } \forall\text{-quantifizierten, skolemisierten Disjunktionen}
\end{aligned}
$$

Übung

Überführt folgende Formeln in $\forall$-quantifizierte, skolemisierte Disjunktionen (DNF)

1. $(\exists x.A(x)) \longrightarrow \exists x.\exists y.B(x) \wedge C(x,y)$
2. $(\forall x.A(x)) \longrightarrow \exists x.\exists y.B(x) \wedge C(x,y)$
3. $\forall x.\forall y.(\exists z.A(x,y,z) \vee (\exists u.C(x,u)) \longrightarrow \exists v.(C(x,v) \wedge B(v,z)))$

Resolution für AL – Erinnerung

$$
\begin{tikzcd}[arrows=-]
A \lor P \arrow[dr] & & \neg P \lor B \arrow[dl] \\
& A \lor B &
\end{tikzcd}
$$

Resolution für FO ?

$$\forall x, y, z. A(f(x, y)) \vee P(g(z, y)) \qquad\qquad \forall y, z. \neg P(g(z, y)) \vee B(h(0))$$

$$\forall x, y, z. A(f(x, y)) \vee B(h(0))$$

Resolution für FO ?

$$\forall x, y, z.A(f(x,y)) \vee P(g(z,y)) \qquad\qquad \forall v, w.\neg P(g(w,v)) \vee B(h(0))$$

$$???\forall x, y.A(f(x,y)) \vee B(h(0))???$$

Resolution für FO ?

$$\forall x, y, z. A(f(x, y)) \lor P(g(z, \underline{h(y)}))$$

$$\forall v, w. \neg P(g(\underline{h(w)}, v)) \lor B($$

$$???\forall x, y. A(f(x, y)) \lor B(h(0))???$$

FO Klausel

Definition (Klauselmenge)

Sei Φ eine Menge von Formeln. Bilde aus $\bigwedge \Phi$ mittels PNF, NNF und Skolemisierung eine Formel der Form

$$(\forall x_1^1. \ldots \forall x_1^{n_1}. L_1^1 \vee \cdots \vee L_1^{k_1}) \wedge \cdots \wedge (\forall x_m^1. \ldots \forall x_m^{n_m}. L_m^1 \vee \cdots \vee L_m^{k_m})$$

so dass alle L_i^j Literale sind.
Dann sind die Mengen $\{L_i^1, \ldots, L_i^{k_i}\}$ eine Menge von FO-Klauseln zu Φ.

Anmerkung:

- Die Variablen in den Kauseln sind voneinander unabhängig, da $\forall$-quantifiziert.
- D.h. Variablen mit dem selben Namen in unterschiedlichen Klauseln sind <u>ungleiche</u> Variablen.