Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 15 vom 06.06.23

Prädikatenlogik III

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2023

Äquivalente Formeln

Teilformel

Definition

Sei τ eine Signatur und φ eine τ-Formeln: Die Menge $\mathrm{TF}(\varphi)$ der Teilformeln von φ ist induktiv definiert als

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TF}(P(t_1,\ldots,t_n)) &:= \{P(t_1,\ldots,t_n)\} \\
\mathrm{TF}(t_1 = t_2) &:= \{t_1 = t_2\} \\
\mathrm{TF}(\neg\psi) &:= \{\neg\psi\} \cup \mathrm{TF}(\psi) \\
\mathrm{TF}(\psi \circ \psi') &:= \{\psi \circ \psi'\} \cup \mathrm{TF}(\psi) \cup \mathrm{TF}(\psi') \text{ mit } \circ \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \leftrightarrow\} \\
\mathrm{TF}(Qx.\psi) &:= \{Qx.\psi\} \cup \mathrm{TF}(\psi)
\end{aligned}
$$

Teilformeln: Übungen

Bestimmt die Teilformeln der folgenden Formeln:

- $\forall x. \neg E(x, x)$
- $\forall x. \forall y. (x < y \lor x = y \lor y < x)$
- $\forall w. \forall r. (\mathrm{inWohnung}(r) = w \land \mathrm{Verbindungstuer}(r, \mathrm{draussen})) \longrightarrow \mathrm{eingangsRaum}(w) = r$

Äquivalenz

Definition (Äquivalenz)

Zwei FO-Formeln φ und ψ mit $\mathrm{frei}(\varphi) = \mathrm{frei}(\psi)$ sind äquivalent, wenn für alle Interpretationen $(\mathfrak{A}, \beta)$ gilt: $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A}, \beta \models \psi$.
Notation: $\varphi \approx \psi$

Äquivalente FO-Formeln sind austauschbar:

Lemma (Ersetzungslemma)

Seien φ und ψ äquivalente FO-Formeln, θ eine FO-Formel mit $\varphi \in \mathrm{TF}(\theta)$ und θ' eine FO-Formel, die sich aus θ ergibt indem ein beliebiges Vorkommen von φ durch ψ ersetzt wird. Dann gilt $\theta \approx \theta'$

Beweis per Induktion über die Struktur von θ. !

Äquivalenzen

Alle Äquivalenzen der Aussagenlogik gelten weiterhin in FO, zum Beispiel

$$\varphi \wedge \psi \approx \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \approx (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta) \qquad \text{Distributivität von } \wedge \text{ über } \vee$$

Was neu ist sind Äquivalenzen mit quantifizierten Formeln:

$$\forall x.\varphi \approx \neg\exists x.\neg\varphi \qquad \text{Dualität von } \exists \text{ und } \forall$$

$$\exists x.(\varphi \vee \psi) \approx \exists x.\varphi \vee \exists x.\psi \qquad \exists \text{ distributiert über } \vee$$

$$\forall x.(\varphi \wedge \psi) \approx \forall x.\varphi \wedge \forall x.\psi \qquad \forall \text{ distributiert über } \wedge$$

$$\exists x.\exists y.\varphi \approx \exists y.\exists x.\varphi$$

$$\forall x.\forall y.\varphi \approx \exists y.\exists x.\varphi$$

Äquivalenzen: Übung

- Definiert die Äquivalenzen, die beschreiben, wie sich $\exists$ und $\forall$ zusammen mit $\longrightarrow$ verhalten. Hinweis: $(\varphi \longrightarrow \psi \approx \neg\varphi \vee \psi)$
- Wie sieht es aus mit $\exists$ und $\forall$ und $\leftrightarrow$?

Äquivalenz

Eine FO-Formeln heißt reduziert, wenn sie nur noch aus den Junktoren $\neg$, $\wedge$ und den Quantor $\exists$ enthält.

Lemma

Jede Formel kann in Linearzeit in eine äquivalente reduzierte FO-Formel transformiert werden.

Beweis klar wegen

$$\varphi \vee \psi \approx \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$
$$\forall x.\varphi \approx \neg\exists x.\neg\varphi$$

Konsequenz: Wie bei AL auch schon können wir uns bei Beweisen auf reduzierte Formeln beschränken, also Formeln die nur aus $\neg$, $\wedge$ und $\exists$ bestehen.

Pränex-Normalform

Pränex-Normalform

Definition

Eine FO-Formel φ ist <u>bereinigt</u>, wenn

- keine Variable in φ sowohl frei als auch gebunden auftritt
- keine Variable mehr als einmal quantifiziert wird

Jede FO-Formel kann durch <u>Umbenennung quantifizierter Variablen</u> bereinigt werden, z.B.

$$\exists \underline{y}.(P(x, \underline{y}) \wedge \forall \underline{x}.Q(\underline{x}, y)) \text{ äquivalent zu } \exists u.(P(x, u) \wedge \forall z.Q(z, y))$$

Definition (Pränex-Normalform)

Eine Formel φ ist in <u>Pränex-Normalform (PNF)</u>, wenn sie bereinigt ist und die Form

$$Q_1 x_1 . Q_2 x_2 . \ldots Q_n x_n . \varphi$$

hat, wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und φ quantorenfrei.

Pränex-Normalform

Theorem

Jede FO-Formel kann in Linearzeit in eine äquivalente Formen in PNF transformiert werden.

Beweis unter Verwendung von folgenden Äquivalenzen:

- Falls x nicht frei in φ vorkommt, gilt:

$$\varphi \lor \exists x.\psi \approx \exists x.(\varphi \lor \psi)$$
$$\varphi \land \exists x.\psi \approx \exists x.(\varphi \land \psi)$$
$$\varphi \lor \forall x.\psi \approx \forall x.(\varphi \lor \psi)$$
$$\varphi \land \forall x.\psi \approx \forall x.(\varphi \land \psi)$$

Übung

Überführt folgende Formel in Pränexnormalform

- $\neg(\forall x.\neg R(x,x) \wedge \forall x.\exists y(R(x,y) \wedge (\neg R(y,y) \wedge \exists y.R(y,x))))$

Negations-Normalform

Definition (Negations-Normalform)

Eine Formel ist in Negationsnormalform, wenn sie nur aus Literalen und den Junktorn $\vee$, $\wedge$ und $\exists$, $\forall$ aufgebaut ist.

Lemma

Jede Formeln kann in eine äquivalente Formeln in Negationsnormalform überführt werden.

- $\varphi \longrightarrow \psi \approx \neg\varphi \vee \psi$
- $\neg(\varphi \wedge \psi) \approx \neg\varphi \vee \neg\psi$, $\neg(\varphi \vee \psi) \approx \neg\varphi \wedge \neg\psi$
- $\neg\exists x.\varphi \approx \forall x.\neg\varphi$, $\neg\forall x.\varphi \approx \exists x.\neg\varphi$
- $\neg\neg\varphi \approx \varphi$

Übung

Überführt folgende Formeln in Negationsnormalform

- $\neg(\forall n.\exists m.n = s(m))$
- $\forall w.\forall r.(\text{inWohnung}(r) = w \wedge \text{Verbindungstuer}(r, \text{draussen})) \longrightarrow \text{eingangsRaum}(w) = r$
- $\neg\exists x.(R(x, y) \wedge \forall z.S(x, z) \longrightarrow R(y, y))$