Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 14 vom 01.06.23

Prädikatenlogik II

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2023

Modelle, Erfüllbarkeit und Gültigkeit

Definition

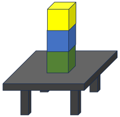
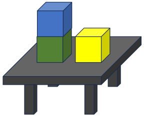
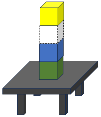
Sei $\mathfrak{A}$ ieine τ-Struktur, φ eine τ-Formel und Φ eine Menge von τ-Formeln.

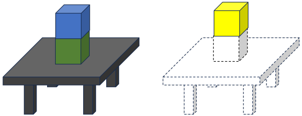
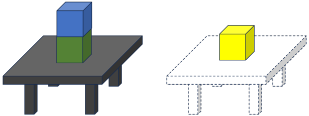
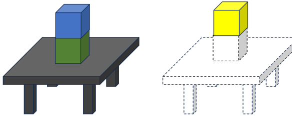
- Die Formel φ ist erfüllbar in $\mathfrak{A}$, falls es eine Belegung β gibt, so dass $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$
- $\mathfrak{A}$ ist ein Modell von φ gdw. $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} = 1$ für alle Belegungen β
- Die Formel φ ist gültig, falls jede Struktur ein Modell ist von φ
- φ folgt aus Φ ($\Phi \models \varphi$), falls in allen Interpretationen $(\mathfrak{A}, \beta)$, in denen Φ gelten, auch φ gilt.

Analog für Formelmengen.

Erfüllbarkeit

Betrachtet die sechs Strukturen

$\mathfrak{A}_1 =$ 
$\mathfrak{A}_2 =$ 
$\mathfrak{A}_3 =$ 

$\mathfrak{A}_4 =$ 
$\mathfrak{A}_5 =$ 
$\mathfrak{A}_6 =$ 

mit jeweils

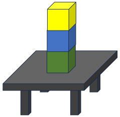
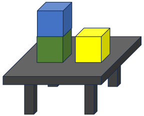
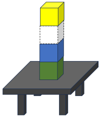
$t \mapsto$ 	$gelb \mapsto$ 	$b1 \mapsto$ 	$gruen \mapsto$ 
$b2 \mapsto$ 	$blau \mapsto$ 	$b3 \mapsto$ 	

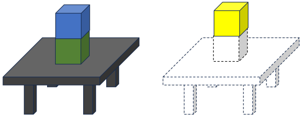
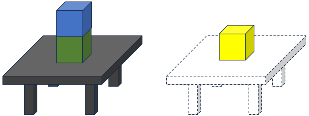
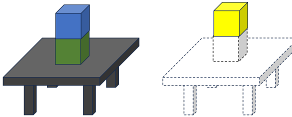
Welche Formel ist in welchen Strukturen erfüllbar?

1. $\mathrm{hatFarbe}(x, \mathrm{gelb}) \wedge \mathrm{aufTisch}(x, t)$
2. $\forall y.\, \mathrm{aufTisch}(x, y) \wedge \mathrm{aufTisch}(z, y) \longrightarrow x = z$

Modelle

Betrachtet die sechs Strukturen

$\mathfrak{A}_1 =$ 
$\mathfrak{A}_2 =$ 
$\mathfrak{A}_3 =$ 

$\mathfrak{A}_4 =$ 
$\mathfrak{A}_5 =$ 
$\mathfrak{A}_6 =$ 

mit jeweils

$t \mapsto$ 	$gelb \mapsto$ 	$b1 \mapsto$ 	$gruen \mapsto$ 
$b2 \mapsto$ 	$blau \mapsto$ 	$b3 \mapsto$ 	

Welche Strukturen sind Modelle folgender Formeln:

1. $\forall x.\, \mathrm{Block}(x) \leftrightarrow (x = b1 \vee x = b2 \vee x = b3)$
2. $\forall x.\, \mathrm{Tisch}(x) \leftrightarrow x = t$

Fragen

- Wir haben einen Sachverhalt (=Struktur/Menge von Strukturen), den wir modellieren wollen:
  - Können wir eine FO-Formelmenge finden, die genau das modelliert, was wir im Kopf haben?
  - Gibt es eine endliche FO-Formelmenge, aus der alle anderen (potenziell unendlich viele) Formeln abgeleitet werden können?

Koinzidenzlemma

Analog zur Aussagenlogik: $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$ ist unabhängig von der Interpretation der Symbole und Variablen, die in φ gar nicht (bzw. nicht frei) vorkommen.

Lemma (Koinzidenzlemma)

Sei φ eine FO-Formel und $(\mathfrak{A}, \beta)$ und $(\mathfrak{A}', \beta')$ Interpretationen, so dass

- $A = A'$,
- $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}'}$ *für alle Funktionssymbole, die in φ vorkommen,*
- $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{A}'}$ *für alle Relationssymbole, die in φ vorkommen,*
- $\beta(x) = \beta'(x)$ *für alle $x \in \mathrm{Frei}(\varphi)$*

Dann gilt: $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$ gdw. $(\mathfrak{A}', \beta') \models \varphi$

Beweis per Induktion über die Struktur von φ.

Strukturen Isomorphismus

Definition (Isomorphismus)

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen. Eine Bijektion $\pi : A \to B$ ist ein Isomorphismus, wenn gilt:

- Für jedes n-stellige Relationssymbol P aus τ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ gdw. } (\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

- Für jedes n-stellige Funktionssymbol f aus τ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt

$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$$

Koinzidenzlemma

- Wenn wir mit einer Formel φ arbeiten, erlaubt das Koinzidenzlemma in Belegungen nur die freien Variable $\mathrm{Frei}(\varphi)$ zu betrachten.

- Daraus folgt folgende Notation:
  Für eine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ schreiben wir

  $$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

  wenn $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ wobei $\beta(x_i) = a_i$ für $1 \leq i \leq n$

Isomorphielemma

Lemma (Isomorphielemma)

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen und $\pi : A \to B$ ein Isomorphismus.
Dann gilt für alle Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)]$$

Daraus folgt intuitiv, dass

- FO kann nicht zwischen isomorphen Strukturen unterscheiden
- Die Namen der Elemente des Universums sind Schall und Rauch

Modelle und Theorien

Lemma

Sei Φ *eine Formelmenge und* $\mathrm{Mod}(\Phi)$ *alle Modelle von* Φ*.*

$$\mathrm{Mod}(\Phi) := \{\mathfrak{A} | \mathfrak{A} \models \Phi\}$$

Es gilt: $\mathrm{Mod}(\Phi)$ *ist abgeschlossen unter Isomorphismen.*

Folgt aus Isomorphiesatz.

Fragen

- Wir haben einen Sachverhalt (= Struktur/Menge von Strukturen), den wir modellieren wollen:
  - Können wir eine FO-Formelmenge finden, die genau das modelliert, was wir im Kopf haben?
    - **Wenn es eine solche Formelmenge gibt, dann sind auch alle Strukturen, die isomorph sind zu unserem Sachverhalt immer auch mitbeschrieben bzw. eben in der Modellklasse.**
  - Gibt es eine endliche FO-Formelmenge, aus der alle anderen (potenziell unendlich viele) Formeln abgeleitet werden können?

Axiomatisierbarkeit

Definition (Axiomatisierbarkeit)

Ein Klasse $\mathcal{M}$ von Strukturen ist <u>axiomatisierbar</u> in FO, wenn es eine FO-Formelmenge Φ gibt, so dass $\mathcal{M} = \mathrm{Mod}(\Phi)$. In dem Fall ist Φ ein <u>Axiomensystem</u> für die Klasse $\mathcal{M}$.

Beispiele:

- Die Klasse aller ungerichteten Graphen ist die Modellklasse von

$$\Phi_{Graph} = \{\forall x.\neg E(x,x), \forall x.\forall y.E(x,y) \longrightarrow E(y,x)\}$$

- Ein Axiomensystem für die Klasse aller Gruppe $(G, \circ, e, ^{-1})$:

$$\Phi_{Gruppe} = \{\forall x.\forall y.\forall z.(x \circ (y \circ z) = ((x \circ y) \circ z), \forall x.(x \circ e) = x, \forall x.x \circ x^{-1} = e\}$$

- Ein Axiomensystem für die Klasse aller linearen Ordnungen ist:

$$\Phi_{<} = \{\forall x.\neg(x < x), \forall x.\forall y.\forall z.(x < y \wedge y < z) \longrightarrow (x < z),$$
$$\forall x.\forall y.(x < y \vee x = y \vee y < x)\}$$

Eigenschaften von Modellklassen

Theorem

Seine Φ, Ψ *zwei Formelmengen. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{Mod}(\Phi \cup \Psi) = \mathrm{Mod}(\Phi) \cap \mathrm{Mod}(\Psi)$

(ii) *Wenn* $\Phi \subseteq \Psi$ *dann* $\mathrm{Mod}(\Psi) \subseteq \mathrm{Mod}(\Phi)$

Theorien

Definition (Theorie)

1. Ein FO-Theorie ist eine erfüllbare Menge Φ von FO-Sätzen, die unter Konsequenz abgeschlossen ist:

$$\Phi \models \varphi \text{ impliziert } \varphi \in \Phi \qquad\qquad \text{für alle Sätze } \varphi$$

2. Ein FO-Theorie Φ ist vollständig, wenn für alle Sätze φ gilt: $\varphi \in \Phi$ oder $\neg\varphi \in \Phi$

Theorien

Lemma

Sei $\mathcal{M}$ eine Klasse von Strukturen und $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ *die Menge aller Sätze, von denen alle Strukturen in $\mathcal{M}$ Modelle sind. Dann ist*

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) := \{\varphi \text{ ist Satz} | \mathcal{M} \models \varphi\}$$

vollständig.

Eigenschaften von Theorien

Theorem

Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ Klassen von Strukturen. Dann gilt:

(i) $\mathsf{Th}(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = \mathsf{Th}(\mathcal{M}) \cap \mathsf{Th}(\mathcal{N})$

(ii) *Wenn* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ *dann* $\mathsf{Th}(\mathcal{N}) \subseteq \mathsf{Th}(\mathcal{M})$

Theorien und Modelle

Theorem

Sei Φ eine Formelmenge und Φ^* die Menge aller Formeln, die aus Φ folgt:

$$\text{Abschluss}(\Phi) := \{\varphi \mid \Phi \models \varphi\}$$

Es gilt:

$$\text{Abschluss}(\Phi) = \text{Th}(\text{Mod}(\Phi))$$

Konsequenz:

- Wenn wir für $\models$ einen vollständigen Kalkül ($\vdash$) haben, dann können wir, wenn wir annehmen das Φ unseren Sachverhalt adäquat beschreibt, dann finden wir auch alle daraus folgenden Eigenschaften.
- Ganz praktikabel ist es nur, wenn unser Sachverhalt endlich axiomatisierbar ist; wenn nicht können wir nie ausschließen, dass es nicht doch noch Strukturen mitbeschreibt, die wir nicht hanbeb wollten.

Fragen

- Wir haben einen Sachverhalt (= Struktur/Menge von Strukturen), den wir modellieren wollen:
  - Können wir eine FO-Formelmenge finden, die genau das modelliert, was wir im Kopf haben?
    - Wenn es eine solche Formelmenge gibt, dann sind auch alle Strukturen, die isomorph sind zu unserem Sachverhalt immer auch mitbeschrieben bzw. eben in der Modellklasse.
    - **Wenn wir für $\models$ einen vollständigen Kalkül haben, dann können wir, wenn wir annehmen das Φ unseren Sachverhalt adäquat beschreibt, dann finden wir auch alle daraus folgenden Eigenschaften.**
  - Gibt es eine endliche FO-Formelmenge, aus der alle anderen (potenziell unendlich viele) Formeln abgeleitet werden können?
    - **Nicht immer, aber wenn dann ist das möglich, falls wir einen vollständigen Kalkül haben (unser Sachverhalt ist axiomatisierbar)**
    - **Wenn es keine endliche FO-Formelmenge gibt, dann werden in der Praxis immer auch nicht gewünschte Strukturen mitbeschrieben**

Äquivalente Formeln

Teilformel

Definition

Sei τ eine Signatur und φ eine τ-Formeln: Die Menge $\mathrm{TF}(\varphi)$ der Teilformeln von φ ist induktiv definiert als

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}(P(t_1,\ldots,t_n)) &:= \{P(t_1,\ldots,t_n)\} \\
\mathrm{TF}(t_1 = t_2) &:= \{t_1 = t_2\} \\
\mathrm{TF}(\neg\psi) &:= \{\neg\psi\} \cup \mathrm{TF}(\psi) \\
\mathrm{TF}(\psi \circ \psi') &:= \{\psi \circ \psi'\} \cup \mathrm{TF}(\psi) \cup \mathrm{TF}(\psi') \text{ mit } \circ \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \leftrightarrow\} \\
\mathrm{TF}(Qx.\psi) &:= \{Qx.\psi\} \cup \mathrm{TF}(\psi)
\end{aligned}$$

Teilformeln: Übungen

Bestimmt die Teilformeln der folgenden Formeln:

- $\forall x.\neg E(x, x)$
- $\forall x.\forall y.(x < y \vee x = y \vee y < x)$
- $\forall w.\forall r.(\text{inWohnung}(r) = w \wedge \text{Verbindungstuer}(r, \text{draussen})) \longrightarrow \text{eingangsRaum}(w) = r$

Äquivalenz

Definition (Äquivalenz)

Zwei FO-Formeln φ und ψ mit $\text{frei}(\varphi) = \text{frei}(\psi)$ sind äquivalent, wenn für alle Interpretationen $(\mathfrak{A}, \beta)$ gilt: $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A}, \beta \models \psi$.
Notation: $\varphi \approx \psi$

Äquivalente FO-Formeln sind austauschbar:

Lemma (Ersetzungslemma)

Seien φ und ψ äquivalente FO-Formeln, θ eine FO-Formel mit $\varphi \in \text{TF}(\theta)$ und θ' eine FO-Formel, die sich aus θ ergibt indem ein beliebiges Vorkommen von φ durch ψ ersetzt wird. Dann gilt $\theta \approx \theta'$

Beweis per Induktion über die Struktur von θ.

Äquivalenzen

Alle Äquivalenzen der Aussagenlogik gelten weiterhin in FO, zum Beispiel

$$\varphi \wedge \psi \approx \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \approx (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta) \qquad \text{Distributivität von } \wedge \text{ über } \vee$$

Was neu ist sind Äquivalenzen mit quantifizierten Formeln:

$$\forall x.\varphi \approx \neg\exists x.\neg\varphi \qquad \text{Dualität von } \exists \text{ und } \forall$$

$$\exists x.(\varphi \vee \psi) \approx \exists x.\varphi \vee \exists x.\psi \qquad \exists \text{ distributiert über } \vee$$

$$\forall x.(\varphi \wedge \psi) \approx \forall x.\varphi \wedge \forall x.\psi \qquad \forall \text{ distributiert über } \wedge$$

$$\exists x.\exists y.\varphi \approx \exists y.\exists x.\varphi$$

$$\forall x.\forall y.\varphi \approx \exists y.\exists x.\varphi$$

Äquivalenzen: Übung

- Definiert die Äquivalenzen, die beschreiben, wie sich $\exists$ und $\forall$ zusammen mit $\longrightarrow$ verhalten. Hinweis: $(\varphi \longrightarrow \psi \approx \neg\varphi \vee \psi)$

- Wie sieht es aus mit $\exists$ und $\forall$ und $\leftrightarrow$?

Äquivalenz

Eine FO-Formeln heißt reduziert, wenn sie nur noch aus den Junktoren $\neg$, $\wedge$ und den Quantor $\exists$ enthält.

Lemma

Jede Formel kann in Linearzeit in eine äquivalente reduzierte FO-Formel transformiert werden.

Beweis klar wegen

$$\varphi \vee \psi \approx \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$
$$\forall x.\varphi \approx \neg\exists x.\neg\varphi$$

Konsequenz: Wie bei AL auch schon können wir uns bei Beweisen auf reduzierte Formeln beschränken, also Formeln die nur aus $\neg$, $\wedge$ und $\exists$ bestehen.

Pränex-Normalform

Pränexform

Eine FO-Formel φ ist bereinigt, wenn

- keine Variable in φ sowohl frei als auch gebunden auftritt
- keine Variable mehr als einmal quantifiziert wird

Jede FO-Formel kann durch Umbenennung quantifizierter Variablen bereinigt werden, z.B.

$$\exists \underline{y}.(P(x,\underline{y}) \land \forall \underline{x}.Q(\underline{x},y)) \text{ äquivalent zu } \exists u.(P(x,u) \land \forall z.Q(z,y))$$

Definition (Pränex-Normalform)

Eine Formel φ ist in Pränex-Normalform (PNF), wenn sie bereinigt ist und die Form

$$Q_1 x_1.Q_2 x_2.\dots Q_n x_n.\varphi$$

hat, wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und φ quantorenfrei.

Pränex-Normalform

Theorem

Jede FO-Formel kann in Linearzeit in eine äquivalente Formen in PNF transformiert werden.

Beweis unter Verwendung von folgenden Äquivalenzen:

- Falls x nicht frei in φ vorkommt, gilt:

$$\varphi \vee \exists x.\psi \approx \exists x.(\varphi \vee \psi)$$
$$\varphi \wedge \exists x.\psi \approx \exists x.(\varphi \wedge \psi)$$
$$\varphi \vee \forall x.\psi \approx \forall x.(\varphi \vee \psi)$$
$$\varphi \wedge \forall x.\psi \approx \forall x.(\varphi \wedge \psi)$$