Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 13 vom 25.05.23

Prädikatenlogik I

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2023

Syntax

Definition (Syntax)

Formeln der Prädikatenlogik bestehen aus Termen und Formeln über diese Terme
Gegeben eine Signatur $\tau = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ und eine Menge von (Objekt)variablen $\mathcal{V}$ disjunkt von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{R}$. Die Menge der Terme über τ und $\mathcal{V}$ $T(\tau, \mathcal{V})$ ist induktiv defniert als:

- $\mathcal{V} \subseteq T(\tau, \mathcal{V})$: Jede Variable ist ein Term
- wenn $t_1, \dots, t_n \in T(\tau, \mathcal{V})$ Terme sind und $f \in \mathcal{F}$ ein Funktionssymbol mit Stelligkeit n, dann ist auch $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\tau, \mathcal{V})$ ein Term.

Formeln

Definition (FO Formeln)

Gegeben eine Signatur τ und eine Menge $\mathcal{V}$ von Objektvariablen, dann ist die Menge der Formeln über τ induktiv definiert:

1. Für alle Terme $t_1, t_2 \in T(\tau, \mathcal{V})$ ist $s = t$ eine τ-Formel
2. Für alle n-stelligen Relationssymbole $R \in \tau$ und τ-Terme $t_1, \ldots, t_n$ ist $R(t_1, \ldots, t_n)$ eine τ-Formel
3. Falls φ, ψ τ-Formeln sind, dann sind auch $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ und $\varphi \longrightarrow \psi$ τ-Formeln
4. Fall $x \in \mathcal{V}$ und φ τ-Formel, dann sind auch $\forall x.\varphi$ und $\exists x.\varphi$ τ-Formeln

- τ-Formeln aus (i) und (ii) sind atomare τ-Formel
- Alle atomaren τ-Formeln φ und ihre Negationen $\neg\varphi$ sind Literale

Semantik von Formeln erster Ordnung

Sei $(\mathfrak{A}, \beta)$ ist eine Interpretation. Die Auswertung $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta}$ einer τ-Formel φ ist definiert als:

- $[\![t_1 = t_2]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} = [\![t_2]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, m \ldots, t_n)]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} := \begin{cases} 1 & \text{falls } ([\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta}) \in R^{\mathfrak{A}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} := 1 - [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta}$
- $[\![\varphi \vee \psi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} := \max([\![\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta})$
- $[\![\varphi \wedge \psi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} := \min([\![\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta})$
- $[\![\varphi \longrightarrow \psi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} = [\![\neg\varphi \vee \psi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} := \max([\![\neg\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta})$
- $[\![\forall x.\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta[a/x]} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $[\![\exists x.\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} := \begin{cases} 1 & \text{falls } ([\![\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta[a/x]} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Spezifikation

Die Blockwelt besteht aus Blöcken und Tischen. Blöcke haben Farben, und können auf dem Tisch stehen oder auf einem anderen Block. Auf jedem Block kann höchstens ein anderer Block stehen. Wenn ein Block auf einem Block steht, muss dieser entweder auf dem Tisch stehen oder selbst wieder auf einem Block stehen. Farben können blau, grün oder gelb sein. Blöcke, Farben und Tische sind jeweils unterschiedliche Dinge.

Formalisierung als FO-Formeln:

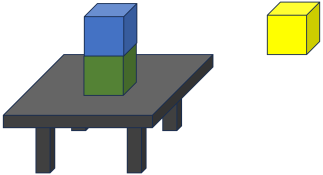
- Signatur:
- Formeln:

Konkrete Situationen

- Beschreibung der Situation, dass es einen Tisch und 3 Blöcke gibt mit den Farben blau, gelb, grün, der grüne Block steht auf dem Tisch und der blaue auf dem grünen Block.
- Eine (minimale, endliche) Interpretation

Konkrete Situationen

- Beschreibung der Situation, dass es einen Tisch und 3 Blöcke gibt mit den Farben blau, gelb, grün, der grüne Block steht auf dem Tisch und der blaue auf dem grünen Block.
- Eine (minimale, endliche) Interpretation



$t \mapsto$  $\quad$ $gelb \mapsto$ 

$b1 \mapsto$  $\quad$ $gruen \mapsto$ 

$b2 \mapsto$  $\quad$ $blau \mapsto$ 

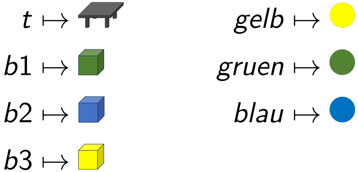
$b3 \mapsto$ 

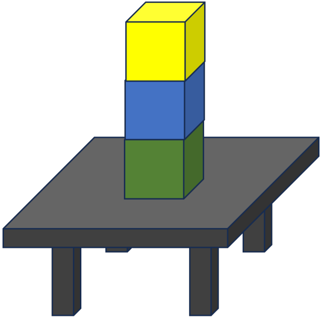
$aufBlock \mapsto \{$  $\rightarrow$  $\}$

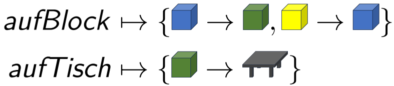
$aufTisch \mapsto \{$  $\rightarrow$  $\}$

Konkrete Situationen

- Beschreibung der Situation, dass es einen Tisch und 3 Blöcke gibt mit den Farben blau, gelb, grün, der grüne Block steht auf dem Tisch und der blaue auf dem grünen Block.
- Eine (minimale, endliche) Interpretation

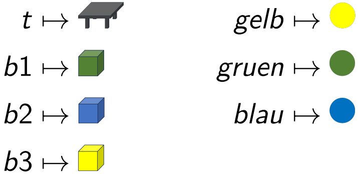


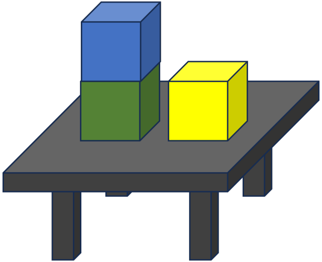


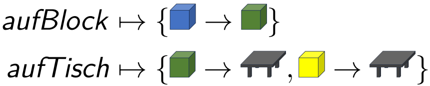


Konkrete Situationen

- Beschreibung der Situation, dass es einen Tisch und 3 Blöcke gibt mit den Farben blau, gelb, grün, der grüne Block steht auf dem Tisch und der blaue auf dem grünen Block.
- Eine (minimale, endliche) Interpretation

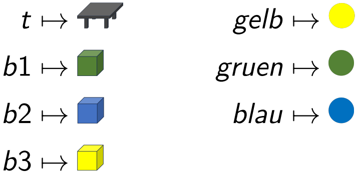


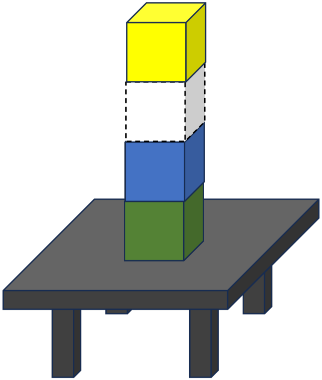


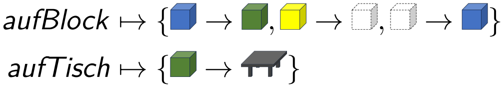


Konkrete Situationen

- Beschreibung der Situation, dass es einen Tisch und 3 Blöcke gibt mit den Farben blau, gelb, grün, der grüne Block steht auf dem Tisch und der blaue auf dem grünen Block.
- Eine (minimale, endliche) Interpretation

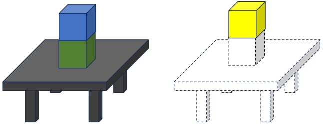






Konkrete Situationen

- Beschreibung der Situation, dass es einen Tisch und 3 Blöcke gibt mit den Farben blau, gelb, grün, der grüne Block steht auf dem Tisch und der blaue auf dem grünen Block.
- Eine (minimale, endliche) Interpretation



$t \mapsto$ 

$b1 \mapsto$ 

$b2 \mapsto$ 

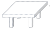
$b3 \mapsto$ 

$gelb \mapsto$ 

$gruen \mapsto$ 

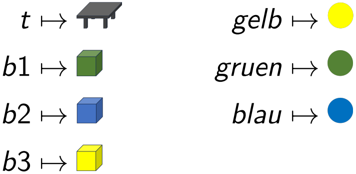
$blau \mapsto$ 

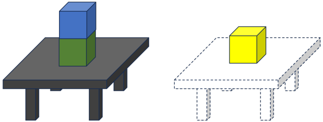
$aufBlock \mapsto \{$  $\rightarrow$  $\}$

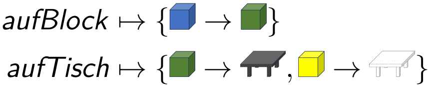
$aufTisch \mapsto \{$  $\rightarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\rightarrow$  $\}$

Konkrete Situationen

- Beschreibung der Situation, dass es einen Tisch und 3 Blöcke gibt mit den Farben blau, gelb, grün, der grüne Block steht auf dem Tisch und der blaue auf dem grünen Block.
- Eine (minimale, endliche) Interpretation

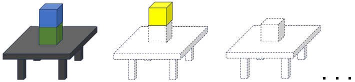






Konkrete Situationen

- Beschreibung der Situation, dass es einen Tisch und 3 Blöcke gibt mit den Farben blau, gelb, grün, der grüne Block steht auf dem Tisch und der blaue auf dem grünen Block.
- Eine ~~(minimale, endliche)~~ Interpretation



$t \mapsto$

$b1 \mapsto$

$b2 \mapsto$

$b3 \mapsto$

$gelb \mapsto$

$gruen \mapsto$

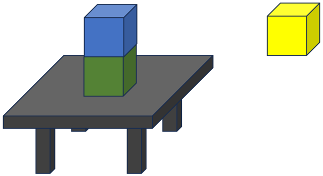
$blau \mapsto$

$aufBlock \mapsto \{ \;\to\; \}$

$aufTisch \mapsto \{ \;\to\; ,\; \;\to\; ,\; \;\to\; ,\; \;\to\; , \ldots \}$

Konkrete Situationen

- Beschreibung der Situation, dass es einen Tisch und 3 Blöcke gibt mit den Farben rot, gelb, grün, der grüne Block steht auf dem Tisch und der blaue auf dem grünen Block.
- Eine (minimale, endliche) Interpretation



Spezifikation: Jetzt seid ihr dran!

Eine Wohnung besteht aus einzelnen Räumen, die miteinander durch Türen verbunden sind. Es gibt außer der Wohnung noch die Außenwelt, die mit der Wohnung durch genau eine Tür verbunden ist. Die Räume einer Wohnung können ein Fenster zur Außenwelt haben.

Formalisierung als FO-Formeln:

- Signatur: ?
- Formeln: ?