Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 12 vom 23.05.23

Prädikatenlogik I

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2023

Motivation

Aussagenlogik hilft Argumentationsstruktur zu beschreiben, abstrahiert aber zu stark

$$\frac{\text{Alle Menschen sind sterblich} \quad \text{Sokrates ist ein Mensch}}{\text{Sokrates ist sterblich}} \qquad \frac{\text{Jedes } P \text{ ist auch ein } Q \quad s \text{ ist ein } P}{s \text{ ist } Q} \qquad \frac{\forall x. P(x) \longrightarrow Q(x) \quad P(s)}{Q(s)}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}. \exists n' \in \mathbb{N}. n' = \mathrm{nf}(n)$
- $\forall n \in \mathbb{N}. \mathrm{nf}(n) \neq 0$
- $0 \in \mathbb{N}$

FO-Signaturen

Definition (Signatur)

Eine **Signatur** $\tau = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ besteht aus disjunkten Mengen von Funktionssymbolen $\mathcal{F}$ und Relationssymbolen $\mathcal{R}$. Jedes dieser Symbole hat eine feste endliche Stelligkeit, auch **Arität** genannt. Nullstellige Funktionssymbole nennen wir Konstantensymbole.

Notation:

- In einer konkreten Signatur geben wir die Stelligkeit der Symbol als Superscript an. Zum Beispiel denotiert die Signatur

$$\langle \{a^0, f^1, g^2\}, \{R^0, P^2, S^1\} \rangle$$

  - eine Menge von Funktionssymbolen a hat Stelligkeit 0, f hat Stelligkeit 1 und g hat Stelligkeit 2
  - eine Menge von Relationssymbolen R hat Stelligkeit 0, P hat Stelligkeit 2 und S hat Stelligkeit 1

FO-Strukturen

Definition (Struktur)

Sei τ eine Signatur. Eine **Struktur** $\mathfrak{A}$ zu τ (auch genannt τ-Struktur) besteht aus

- einer nichtleeren Menge A, dem Universum von $\mathfrak{A}$
- zu jedem n-stelligem Relationssymbol R aus τ eine n-stellige Relation $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$
- zu jedem n-stelligem Funktionssymbol f aus τ eine Funktion $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$

Strukturen

- Strukturen schreiben wir in Frakturschrift: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$
- der entsprechende lateinische Buchstabe $A, B, C, \ldots$ denotiert das **Universum der Struktur**
- die Elemente des Universums bezeichnen wir mit $a, b, c, \ldots$
- $\mathfrak{A} = (A, R_1^{\mathfrak{A}}, R_2^{\mathfrak{A}}, R_3^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_1^{\mathfrak{A}}, f_2^{\mathfrak{A}}, f_3^{\mathfrak{A}}, \ldots)$ bezeichnet eine Struktur über der Signatur $\{R_1, R_2, R_3, \ldots, f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ mit Universum A

Beispiele

- Blocksworld:
  - Signatur: Unäre Relationssymbole Rot, Gelb, Blau,
  - Binäre Relationssymbole: auf, unter, neben
  - Unäre Konstantensymbole: lieblingsblock

Beispiele

- Blocksworld:
  - Signatur: Unäre Relationssymbole Rot, Gelb, Blau,
  - Binäre Relationssymbole: auf, unter, neben
  - Unäre Konstantensymbole: lieblingsblock
- Relationale Datenbanken: Jede Tabelle ist eine Relation

Beispiele

- Blocksworld:
  - Signatur: Unäre Relationssymbole Rot, Gelb, Blau,
  - Binäre Relationssymbole: auf, unter, neben
  - Unäre Konstantensymbole: lieblingsblock
- Relationale Datenbanken: Jede Tabelle ist eine Relation
- XML-Strukturen

Beispiele

- Blocksworld:
  - Signatur: Unäre Relationssymbole Rot, Gelb, Blau,
  - Binäre Relationssymbole: auf, unter, neben
  - Unäre Konstantensymbole: lieblingsblock
- Relationale Datenbanken: Jede Tabelle ist eine Relation
- XML-Strukturen
- Smart Home:
  - Lichter, Räume, Zustand

Beispiele

- Blocksworld:
  - Signatur: Unäre Relationssymbole Rot, Gelb, Blau,
  - Binäre Relationssymbole: auf, unter, neben
  - Unäre Konstantensymbole: lieblingsblock
- Relationale Datenbanken: Jede Tabelle ist eine Relation
- XML-Strukturen
- Smart Home:
  - Lichter, Räume, Zustand
- Graphen

Beispiele

- Blocksworld:
  - Signatur: Unäre Relationssymbole Rot, Gelb, Blau,
  - Binäre Relationssymbole: auf, unter, neben
  - Unäre Konstantensymbole: lieblingsblock
- Relationale Datenbanken: Jede Tabelle ist eine Relation
- XML-Strukturen
- Smart Home:
  - Lichter, Räume, Zustand
- Graphen
- Transitionssysteme:
  - Zustände und Operationen
  - einstellige Prädikate, die in Zuständen gelten und
  - binäre Prädikate für Zustandübergänge

Beispiele

- Blocksworld:
  - Signatur: Unäre Relationssymbole Rot, Gelb, Blau,
  - Binäre Relationssymbole: auf, unter, neben
  - Unäre Konstantensymbole: lieblingsblock
- Relationale Datenbanken: Jede Tabelle ist eine Relation
- XML-Strukturen
- Smart Home:
  - Lichter, Räume, Zustand
- Graphen
- Transitionssysteme:
  - Zustände und Operationen
  - einstellige Prädikate, die in Zuständen gelten und
  - binäre Prädikate für Zustandübergänge
- Mathematik:
  - Natürliche Zahlen (unendlich)

Beispiele

- Blocksworld:
  - Signatur: Unäre Relationssymbole Rot, Gelb, Blau,
  - Binäre Relationssymbole: auf, unter, neben
  - Unäre Konstantensymbole: lieblingsblock
- Relationale Datenbanken: Jede Tabelle ist eine Relation
- XML-Strukturen
- Smart Home:
  - Lichter, Räume, Zustand
- Graphen
- Transitionssysteme:
  - Zustände und Operationen
  - einstellige Prädikate, die in Zuständen gelten und
  - binäre Prädikate für Zustandübergänge
- Mathematik:
  - Natürliche Zahlen (unendlich)
  - Reelle Zahlen (überabzählbar),

Beispiele

- Blocksworld:
  - Signatur: Unäre Relationssymbole Rot, Gelb, Blau,
  - Binäre Relationssymbole: auf, unter, neben
  - Unäre Konstantensymbole: lieblingsblock
- Relationale Datenbanken: Jede Tabelle ist eine Relation
- XML-Strukturen
- Smart Home:
  - Lichter, Räume, Zustand
- Graphen
- Transitionssysteme:
  - Zustände und Operationen
  - einstellige Prädikate, die in Zuständen gelten und
  - binäre Prädikate für Zustandübergänge
- Mathematik:
  - Natürliche Zahlen (unendlich)
  - Reelle Zahlen (überabzählbar),
  - Ordnungen, Aussagen zu Zeitpunkten

Substrukturen

Definition (Substrukturen)

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen. $\mathfrak{A}$ ist Substruktur von $\mathfrak{B}$ (kurz: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$) gdw.

- $A \subseteq B$
- für alle Relationssymbole $R \in \tau$ mit Stelligkeit n gilt $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$
- für alle Funktionssymbole $f \in \tau$ mit Stelligkeit n gilt $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} |_A$

- $f^{\mathfrak{B}} |_A$ ist die Restriktion von $f^{\mathfrak{B}}$ auf A
- Falls $\mathfrak{A}$ ist Substruktur von $\mathfrak{B}$, dann ist A **τ-abgeschlossen**, d.h. für all n-stelligen Funktionssymbole f gilt für alle alle $a_1, \ldots, a_n$ dass $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) \in A$
- Beispiel: $2\mathbb{N} = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ ist $\{+\}$-abgeschlossen. Also ist $(2\mathbb{N}, \{+\}, \emptyset) \subseteq (\mathbb{N}, \{+\}, \emptyset)$

Strukturen Isomorphismus

Definition (Isomorphismus)

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen. Eine Bijektion $\pi : A \to B$ ist ein **Isomorphismus**, wenn gilt:

- Für jedes n-stellige Relationssymbol P aus τ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ gdw. } (\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n) \in R^{\mathfrak{B}})$$

- Für jedes n-stellige Funktionssymbol f aus τ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt

$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$$

Syntax

Definition (Syntax)

Formeln der Prädikatenlogik bestehen aus Termen und Formeln über diese Terme
Gegeben eine Signatur $\tau = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ und eine Menge von (Objekt)variablen $\mathcal{V}$ disjunkt von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{R}$. Die Menge der Terme über τ und $\mathcal{V}$ $T(\tau, \mathcal{V})$ ist induktiv defniert als:

- $\mathcal{V} \subseteq T(\tau, \mathcal{V})$: Jede Variable ist ein Term
- wenn $t_1, \ldots, t_n \in T(\tau, \mathcal{V})$ Terme sind und $f \in \mathcal{F}$ ein Funktionssymbol mit Stelligkeit n, dann ist auch $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\tau, \mathcal{V})$ ein Term.

Notation:

- Für einige Symbole erlauben wir infix Notation für bessere Lesbarkeit: Zum Beispiel schreiben wir $x + y, x \times y$ für die Funktionssymbole $+, \times$. Analog für Relationssymbole zum Beispiel $x < y$.

Formeln

- Terme als Bäume

Formeln

Definition (FO Formeln)

Gegeben eine Signatur τ und eien Menge $\mathcal{V}$ von Objektvariablen, dann ist die Menge der Formeln über τ induktiv definiert:

(i) Für alle Terme $t_1, t_2 \in T(\tau, \mathcal{V})$ ist $s = t$ eine τ-Formel

(ii) Für alle n-stelligen Relationssymbole $R \in \tau$ und τ-Terme $t_1, \ldots, t_n$ ist $R(t_1, \ldots, t_n)$ eine τ-Formel

(iii) Falls φ, ψ τ-Formeln sind, dann sind auch $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ und $\varphi \longrightarrow \psi$ τ-Formeln

(iv) Fall $x \in \mathcal{V}$ und φ τ-Formel, dann sind auch $\forall x.\varphi$ und $\exists x.\varphi$ τ-Formeln

- τ-Formeln aus (i) und (ii) sind **atomare** τ-Formel
- Alle atomaren τ-Formeln φ und ihre Negationen $\neg\varphi$ sind **Literale**

Konventionen

- statt $\neg(t = t')$ schreiben wir auch $t \neq t'$
- $\longrightarrow$ und $\longleftrightarrow$ sind analog zu AL definiert, minimale Menge wie bei AL plus $\exists$
- Bindungen:
  - $\neg$ vor $\wedge$ vor $\vee$ vor $\longrightarrow$ vor $\longleftrightarrow$ vor $\forall, \exists$
  - Klammern können weggelassen werden, wenn Resulat eindeutig.
- Vorkommen von Variablen: frei und gebundenen
- $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$: dann sind die x_i alle freien Variablen in φ
- Formeln ohne freie Variablen heißen **Satz**

Definition Menge der freien Variablen

Die Variablen eines Terms bzw. eienr Formeln sind alle darin vorkommenden Variablen. Die **freien Variablen** einer Formel sind alle nicht durch einen weiter außen stehenden Quantor gebunden Variablen.

- Für alle atomare Formeln φ sind alle darin vorkommenden Variablen die freien Variablen: $\mathsf{frei}(\varphi) := \mathsf{var}(\varphi)$
- $\mathsf{frei}(\neg\varphi) := \mathsf{frei}(\varphi)$
- $\mathsf{frei}(\varphi \circ \psi) := \mathsf{frei}(\varphi) \cup \mathsf{frei}(\psi)$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow\}$
- $\mathsf{frei}(\exists x.\varphi) = \mathsf{frei}(\forall x.\psi) := \mathsf{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$

Belegung und Interprationen

Definition (Belegung)

Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur und $\mathcal{V}$ eine Menge von Objektvariablen. Eine **Belegung** für $\mathfrak{A}$ ist eine totale Funktion $\beta : \mathcal{V} \rightarrow A$.
Notation:

$$\beta[x/a](y) := \begin{cases} a & \text{if } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Belegung und Interprationen

Definition (Belegung)

Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur und $\mathcal{V}$ eine Menge von Objektvariablen. Eine **Belegung** für $\mathfrak{A}$ ist eine totale Funktion $\beta : \mathcal{V} \to A$.

Notation:

$$\beta[x/a](y) := \begin{cases} a & \text{if } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition (Interpretation)

Ein Paar $(\mathfrak{A}, \beta)$ ist **eine Interpretation**. Die Auswertung von τ-Termen t unter einer Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ wird denotiert als $[\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta}$ ist definiert als

- $x \in \mathcal{V}$: $[\![x]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} := \beta(x)$
- f n-stelliges Funktionssymbol und $t_1, \ldots, t_n$ τ-Terme:
  $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta} := f^{\mathfrak{A}}([\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{A}}_{\beta})$

Semantik von Formeln erster Ordnung

Sei $(\mathfrak{A}, \beta)$ ist eine Interpretation. Die Auswertung $[\![\varphi]\!]_\beta^\mathfrak{A}$ einer τ-Formel φ ist definiert als:

- $[\![t_1 = t_2]\!]_\beta^\mathfrak{A} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![t_1]\!]_\beta^\mathfrak{A} = [\![t_2]\!]_\beta^\mathfrak{A} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $[\![R(t_1, m \ldots, t_n)]\!]_\beta^\mathfrak{A} := \begin{cases} 1 & \text{falls } ([\![t_1]\!]_\beta^\mathfrak{A}, \ldots, [\![t_n]\!]_\beta^\mathfrak{A}) \in R^\mathfrak{A} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $[\![\neg\varphi]\!]_\beta^\mathfrak{A} := 1 - [\![\varphi]\!]_\beta^\mathfrak{A}$
- $[\![\varphi \vee \psi]\!]_\beta^\mathfrak{A} := \max([\![\varphi]\!]_\beta^\mathfrak{A}, [\![\psi]\!]_\beta^\mathfrak{A})$
- $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_\beta^\mathfrak{A} := \min([\![\varphi]\!]_\beta^\mathfrak{A}, [\![\psi]\!]_\beta^\mathfrak{A})$
- $[\![\varphi \longrightarrow \psi]\!]_\beta^\mathfrak{A} = [\![\neg\varphi \vee \psi]\!]_\beta^\mathfrak{A} := \max([\![\neg\varphi]\!]_\beta^\mathfrak{A}, [\![\psi]\!]_\beta^\mathfrak{A})$
- $[\![\forall x.\varphi]\!]_\beta^\mathfrak{A} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi]\!]_{\beta[x/a]}^\mathfrak{A} = 1 \text{ für alle } a \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $[\![\exists x.\varphi]\!]_\beta^\mathfrak{A} := \begin{cases} 1 & \text{falls } ([\![\varphi]\!]_{\beta[x/a]}^\mathfrak{A} = 1 \text{ für ein } a \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$