

Einführung in die Formale Logik
Vorlesung 10 vom 11.05.23
Korrektheit und Vollständigkeit I

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2023

Aufwärmübung

Ein Student schrieb:

Ich hab eine Frage zum aktuellen Übungsblatt.

Dort sollen wir durch natürliches Schließen zeigen, dass:

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (!A \rightarrow !B)$$

ein Theorem ist.

Nach meinem Verständnis ist dies jedoch kein Theorem. Die Belegung $v=[A \mapsto 1, B \mapsto 0]$ ergibt einen Widerspruch.

► Warum ist das richtig, aber die Argumentation lückenhaft?

Aufwärmübung

Ein Student schrieb:

Ich hab eine Frage zum aktuellen Übungsblatt.

Dort sollen wir durch natürliches Schließen zeigen, dass:

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (!A \rightarrow !B)$$

ein Theorem ist.

Nach meinem Verständnis ist dies jedoch kein Theorem. Die Belegung $v=[A \mapsto 1, B \mapsto 0]$ ergibt einen Widerspruch.

- ▶ Warum ist das richtig, aber die Argumentation lückenhaft?
- ▶ Was ist der Unterschied zwischen einer lückenhaften Argumentation und einer falschen Behauptung?

Eine Beispielableitung

$$\begin{array}{c}
 \frac{[(P \vee Q) \wedge \neg P]^1}{P \vee Q} \wedge E_L \quad \frac{[P]^2 \quad \frac{[(P \vee Q) \wedge \neg P]^1}{\neg P} \wedge E_R}{\perp} \neg E \\
 \frac{\perp}{Q} \perp \\
 \frac{Q \quad [Q]^2}{(P \vee Q) \wedge \neg P \longrightarrow Q} \vee E^2 \longrightarrow I^1
 \end{array}$$

Eine Beispielableitung (minimale Version)

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P]^3 \quad \frac{[\neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg P]^1}{\neg P} \wedge E_R}{\frac{\perp}{Q} \perp} \neg E \\
 \frac{[\neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg P]^1}{\neg(\neg P \wedge \neg Q)} \wedge E_L \quad \frac{\frac{\perp}{\neg P} \neg I^3 \quad \frac{[\neg Q]^2}{\neg E} \quad \frac{[Q]^4 \quad \frac{[\neg Q]^2}{\neg E}}{\frac{\perp}{\neg Q} \neg I^4} \wedge I}{\neg P \wedge \neg Q} \neg E \\
 \frac{\frac{\perp}{Q} \text{raa}^2}{\neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg P \longrightarrow Q} \longrightarrow I^1
 \end{array}$$