Einführung in die Formale Logik

Vorlesung 9 vom 09.05.23

Natürliches Schließen III

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2023

Ein Klassischer Beweis

Zu Zeigen: $\sqrt{2}$ ist irrational ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Beweis.

	Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational	$\neg A$
$\Longleftrightarrow$	$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ und p, q teilerfremd	$B_1 \wedge C$
$\Longleftrightarrow$	$2 = \frac{p^2}{q^2}$	B_2
$\Longleftrightarrow$	$p^2 = 2q^2$ (p^2 gerade)	B_3
$\Longleftrightarrow$	$p = 2r$ (p gerade)	B_4
$\Longleftrightarrow$	$p^2 = 4r^2$	B_5
$\Longleftrightarrow$	$2q^2 = 4r^2$	B_6
$\Longleftrightarrow$	$q^2 = 2r^2$ (q^2 gerade)	B_7
$\Longleftrightarrow$	q gerade	B_8
$\Longleftrightarrow$	p und q gerade, also sind p und q nicht teilerfremd	$\neg C$
	Widerspruch ↯	$\perp$
	Also ist $\sqrt{2}$ irrational	A

$\square$

Axiome für den Beweis

$$
\begin{aligned}
\Gamma = \{\ & \neg A \longleftrightarrow B_1 \wedge C, \\
& B_1 \longleftrightarrow B_2, B_2 \longleftrightarrow B_3, B_3 \longleftrightarrow B_4, B_4 \longleftrightarrow B_5, \\
& B_3 \wedge B_5 \longrightarrow B_6, \\
& B_6 \longleftrightarrow B_7, B_7 \longleftrightarrow B_8, \\
& B_4 \wedge B_8 \longrightarrow \neg C \}
\end{aligned}
$$

Ein letztes Beispiel

$$\vdash (A \land B \longrightarrow C) \longleftrightarrow (B \land A \longrightarrow C)$$