

8. Übungsblatt

Ausgabe: 16.06.22

Abgabe: 23.06.22 10:00

Die Lösungen bitte in der Vorlage `uebung-08.md` eintragen und diese in Eurem KSGM-Repository rechtzeitig committen und hochladen.

8.1 Größter Gemeinsamer Teiler

Dieses Programm berechnet den größten gemeinsamen Teiler (ggT) zweier ganzer Zahlen x, y , bezeichnet als $\text{gcd}(x, y)$:

```
1 // {0 < a ∧ 0 < b ∧ a = A ∧ b = B}
2 while (b != 0) /** inv ??? */
3 {
4     if (a <= b) {
5         b = b - a;
6     }
7     else {
8         a = a - b;
9     }
10 }
11 // {a = gcd(A, B)}
```

(1) Was ist die Invariante?

Hinweis: Betrachten Sie dazu den ggT von a und b , und den ggT von A und B .

(2) Berechnen Sie ausgehend von der Invariante die vereinfachten Verifikationsbedingungen, und damit einhergehend die schwächsten Vorbedingungen, wie in der Vorlesung eingehend vorgestellt. Es kann dabei sinnvoll sein, explizite Zusicherungen einzufügen.

(3) Beweisen Sie alle vereinfachten Verifikationsbedingungen, die nicht trivial bewiesen werden.

Dabei können Sie auf folgende Eigenschaften des ggT zurückgreifen:

$$\forall x y. 0 < y \leq x \implies \text{gcd}(x, y) = \text{ggT}(x - y, y)$$

$$\forall x y. \text{gcd}(x, y) = \text{gcd}(y, x)$$

$$\forall x. \text{gcd}(x, 0) = x$$