

3. Übungsblatt

Ausgabe: 12.05.22

Abgabe: 17.05.22 10:00

Die Lösungen bitte in der Vorlage `uebung-03.md` eintragen und diese in Eurem KSGM-Repository rechtzeitig committen und hochladen.

3.1 Eigenschaften von arithmetischen Ausdrücken

Wir definieren die Funktion `Vars` auf arithmetischen Ausdrücken, welche die Menge der in einem arithmetischen Ausdruck enthaltenen Programmvariablen liefert:

$$\begin{aligned} \text{Vars}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x\} && x \in \mathbf{Loc} \\ \text{Vars}(n) &\stackrel{\text{def}}{=} \emptyset && n \in \mathbf{Z} \\ \text{Vars}(a_1 \oplus a_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Vars}(a_1) \cup \text{Vars}(a_2) && \oplus \in \{+, -, \times, /\} \end{aligned}$$

(a) Seien $x, y, z \in \mathbf{Loc}$. Berechnen Sie die Menge der Programmvariablen der folgenden arithmetischen Ausdrücke:

$$\text{Vars}(x + 3 * y) = ?$$

$$\text{Vars}((z * 2) / x) = ?$$

(b) Folgende Eigenschaft soll für arithmetische Ausdrücke gelten:

$$\forall a \in \mathbf{AExp}. \forall \sigma \in \Sigma. \forall n \in \mathbf{Z}. \langle a, \sigma \rangle \rightarrow_{\mathbf{AExp}} n \implies \text{Vars}(a) \subseteq \text{dom}(\sigma) \quad (1)$$

Was bedeutet diese Eigenschaft (in natürlicher Sprache)?

(c) Geben Sie entweder eine Beweisskizze (wenn Eigenschaft (1) gilt), oder ein Gegenbeispiel (wenn (1) nicht gilt). Die Beweisskizze sollte angeben, welche Beweismethoden (bspw. Induktion, welche, über welche Variable) genutzt werden.

3.2 Eigenschaften von boolschen Ausdrücken

Wir erweitern jetzt die Funktion `Vars` auf boolsche Ausdrücke wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Vars}(\mathbf{1}) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Vars}(\mathbf{0}) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \\ \text{Vars}(a_1 \oplus a_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Vars}(a_1) \cup \text{Vars}(a_2) && \oplus \in \{==, <=\}, a_1, a_2 \in \mathbf{AExp} \\ \text{Vars}(b_1 \oplus b_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Vars}(b_1) \cup \text{Vars}(b_2) && \oplus \in \{\&\&, ||\}, b_1, b_2 \in \mathbf{BExp} \\ \text{Vars}(!b) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Vars}(b) && b \in \mathbf{BExp} \end{aligned}$$

(a) Seien $x, y, z \in \mathbf{Loc}$. Berechnen Sie die Menge der Programmvariablen der folgenden boolschen Ausdrücke:

$$\text{Vars}(x + 3 * y == z + 5) = ?$$

$$\text{Vars}(x <= 2 * y \&\& 2 * z <= x) = ?$$

(b) Wir betrachten wieder eine Eigenschaft, diesmal für boolesche Ausdrücke:

$$\forall b \in \mathbf{Bexp}. \forall \sigma \in \Sigma. \forall t \in \mathbb{B}. \langle b, \sigma \rangle \rightarrow_{\mathbf{Bexp}} t \implies \text{Vars}(b) \subseteq \text{dom}(\sigma) \quad (2)$$

Was bedeutet diese Eigenschaft?

(c) Geben Sie entweder eine Beweisskizze (wenn (2) gilt), oder ein Gegenbeispiel (wenn (2) nicht gilt).

3.3 *Eigenschaften von Programmen*

Betrachten Sie folgende spezielle Eigenschaft von C0-Programmen:

$$\forall c \in \mathbf{Stmt}. \forall x \in \mathbf{Loc}. \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma. (x \in \text{dom}(\sigma) \wedge \langle c, \sigma \rangle \rightarrow_{\mathbf{Stmt}} \sigma') \implies x \in \text{dom}(\sigma') \quad (3)$$

(a) Was bedeutet diese Eigenschaft?

(b) Geben Sie entweder eine Beweisskizze (wenn (3) gilt), oder ein Gegenbeispiel (wenn (3) nicht gilt).

Hinweis: Von den Eigenschaften (1), (2), (3) sind zwei wahr und eine falsch.