Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 4 vom 10.05.22
Äquivalenz der Operationalen und Denotationalen Semantik

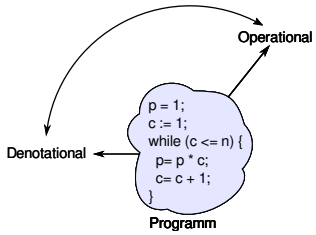
Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2022

Fahrplan

Operationale und Denotationale Semantik



Äquivalenz der Operationalen und Denotationalen Semantik

- Was müssen wir zeigen?
- Auf oberster Ebene: für alle $c \in \mathbf{Stmt}, \sigma, \sigma' \in \Sigma$:

$$\langle c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \iff (\sigma, \sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}} \quad (1)$$

- Semantik von Anweisungen ist über Semantik von Ausdrücken definiert, deshalb benötigen wir Hilfsaussagen

$$\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} t \iff (\sigma, t) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}} \quad (2)$$
$$\langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \iff (\sigma, n) \in [\![a]\!]_{\mathcal{A}} \quad (3)$$

- Wie zeigen wir das?

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} n$	Denotational $[\![a]\!]_{\mathcal{A}}$
m∈ **Z**	$\langle m, \sigma\rangle \to_{Aexp} m$	$\{(\sigma, m) \mid \sigma \in \Sigma\}$
x∈ **Loc**	$\dfrac{x \in Dom(\sigma)}{\langle x, \sigma\rangle \to_{Aexp} \sigma(x)}$	$\{(\sigma, \sigma(x)) \mid \sigma \in \Sigma, x \in Dom(\sigma)\}$

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} n$	Denotational $[\![a]\!]_{\mathcal{A}}$
$a_1 \otimes a_2$	$\dfrac{\langle a_1, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \quad \langle a_2, \sigma\rangle \to_{Aexp} m}{\langle a_1 \otimes a_2, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \otimes' m}$ $\otimes \in \{+, *, -\}$	$\{(\sigma, n \otimes' m) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{A}}, (\sigma, m) \in [\![a_2]\!]_{\mathcal{A}}\}$
a_1 / a_2	$\dfrac{\langle a_1, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \quad \langle a_2, \sigma\rangle \to_{Aexp} m \quad m \neq 0}{\langle a_1 / a_2, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \div m}$	$\{(\sigma, n \div m) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{A}}, (\sigma, m) \in [\![a_2]\!]_{\mathcal{A}}, m \neq 0\}$

Äquivalenz operationale und denotationale Semantik

- Zu zeigen Gleichung (3) von Folie 4:
- Für alle $a \in \mathbf{Aexp}$, für alle $n \in \mathbb{Z}$, für alle Zustände σ:

$$\langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \iff (\sigma, n) \in [\![a]\!]_{\mathcal{A}}$$

- Beweis Prinzip?

Exkurs: Beweisprinzipien

- Induktion über $\mathbb{N}$ ($S(n)$ ist der **Nachfolger** von n):

$$\frac{P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \Longrightarrow P(S(n))}{\forall x \in \mathbb{N}.\, P(x)}$$

- Beispiel: Addition ist definiert durch

$$x + 0 = x$$
$$x + S(y) = S(x + y)$$

- Zeige $x + y = y + x$ durch Induktion über y:
  1. Basis: $x + 0 = 0 + x$
  2. Induktionsschritt: Annahme $x + y = y + x$, dann zeige $x + S(y) = S(y) + x$.
     - Benötigt Hilfsbeweise $0 + x = x$ und $S(x + y) = S(x) + y$

Arbeitsblatt 4.1: Natürliche Induktion

- Zeigt durch natürliche Induktion:

$$0 + x = x \qquad S(x + y) = S(x) + y$$

- Welche Variable benutzt ihr für die Induktion? Was ist der Unterschied?

Wohlfundiertheit

Wohlfundiertheit

Eine binäre Relation $\prec \subseteq S \times S$ ist **wohlfundiert**, wenn es keine unendlich **absteigenden** Ketten gibt

$$\cdots \prec a_3 \prec a_2 \prec a_1$$

Beispiele:

- $(N, \leq)$? Nein: $\cdots \leq 1 \leq 1 \leq 1$
- $(\mathbb{N}, <)$? Ja.
- $(\mathbb{Z}, <)$? Nein: $\cdots < -3 < -2 < -1 < 0$
- $(\mathbb{Q}^+, <)$? Nein: $\ldots < \frac{1}{n} \ldots < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$

Eigenschaften wohlfundierter Relationen

- Eine wohlfundierte Relation ist **irreflexiv:** $\forall x \in S. x \not\prec x$
  - Ansonsten gäbe es $\cdots \prec x \prec x \prec x$
- **Lemma**: $\prec$ ist wohlfundiert gdw. jede nicht-leere Untermenge $Q \subseteq S$ ein minimales Element $\min Q$ hat:

$$\min Q \in Q \wedge \forall b. b \prec \min Q \Longrightarrow b \notin Q$$

Wohlfundierte Induktion

Noethersche Induktion (Wohlfundierte Induktion)

Sei $\prec \subseteq R \times R$ **wohlfundiert** und P eine Aussage über Elemente von R. Dann gilt

$$\frac{\forall v \in R. (\forall u \in R. u \prec v \Longrightarrow P(u)) \Longrightarrow P(v)}{\forall x \in R. P(x)}$$

Beispiele:

- Mit $S = \mathbb{N}$, $a \prec a + 1$: natürliche Induktion.
- Warum? Fallunterscheidung über v: entweder $v = 0$, dann gibt es kein u so dass $u \prec 0$ und die Voraussetzung ist $P(0)$; oder $v = w + 1$, dann $w \prec w + 1$, und die Voraussetzung ist $P(w) \Longrightarrow P(w + 1)$

Strukturelle Ordnung

Strukturelle Ordnung

Die strukturelle Ordnung auf arithmetischen Ausdrücken ist definiert als:

$$\forall a, a' \in \textbf{Aexp}., a' \prec a \Longleftrightarrow a' \text{ ist Teilausdruck von } a$$

Dabei ist "Teilausdruck" formalisiert als $\otimes \in \{+, *, -, /\}$:

$$a \text{ Teilausdruck-von } (a_1 \otimes a_2) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} a = a_1 \vee a \text{ Teilausdruck-von } a_1 \vee \\ a = a_2 \vee a \text{ Teilausdruck-von } a_2 \end{array} \right)$$

- Beispiel für strukturelle Induktion: Rechtseindeutigkeit von $[\![-]\!]_{\mathcal{A}}$ ($\longrightarrow$ Vorlesung 3)

Arbeitsblatt 4.2: Strukturelle Induktion

- **Beweist**, dass die Relation "Teilausdruck-von" wohlfundiert ist.

Äquivalenz operationale und denotationale Semantik

- Für alle $a \in \textbf{Aexp}$, für alle $n \in \mathbb{Z}$, für alle Zustände σ:

$$\langle a, \sigma \rangle \rightarrow_{Aexp} n \Longleftrightarrow (\sigma, n) \in [\![a]\!]_{\mathcal{A}}$$

- Beweis Prinzip?per struktureller Induktion über a. (Warum?)

Beweis: $\forall a \in \textbf{Aexp}. \forall n \in \mathbb{Z}. \forall \sigma. \langle a, \sigma \rangle \rightarrow_{Aexp} n \Longleftrightarrow (\sigma, n) \in [\![a]\!]_{\mathcal{A}}$

Induktionsanfänge

- $a \equiv m \in \textbf{Z}$:

$$\left. \begin{array}{l} \langle m, \sigma \rangle \rightarrow_{Aexp} [\![m]\!] \\ [\![m]\!]_{\mathcal{A}} = \{(\sigma', [\![m]\!]) \mid \sigma' \in \Sigma\} \Rightarrow (\sigma, [\![m]\!]) \in [\![m]\!]_{\mathcal{A}} \end{array} \right] \Longleftrightarrow$$

- $a \equiv X \in \textbf{Loc}$:
  1. $X \in Dom(\sigma)$:

$$\left. \begin{array}{l} \langle X, \sigma \rangle \rightarrow_{Aexp} \sigma(X) \\ [\![X]\!]_{\mathcal{A}} = \{(\sigma', \sigma'(X)) | \sigma' \in \Sigma, X \in Dom(\sigma')\} \Rightarrow (\sigma, \sigma(X)) \in [\![X]\!]_{\mathcal{A}} \end{array} \right] \Longleftrightarrow$$

  2. $X \notin Dom(\sigma)$:

$$\left. \begin{array}{l} \langle X, \sigma \rangle \rightarrow_{Aexp} \bot \\ [\![X]\!]_{\mathcal{A}} = \{(\sigma', \sigma'(X)) | \sigma' \in \Sigma, X \in Dom(\sigma')\} \Rightarrow \sigma \notin Dom([\![X]\!]_{\mathcal{A}}) \end{array} \right] \Longleftrightarrow$$

Beweis: $\forall a \in \mathbf{Aexp}.\forall n \in \mathbb{Z}.\forall \sigma.\ \langle a,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \iff (\sigma,n) \in [\![a]\!]_{\mathcal{A}}$

Induktionsschritte

- $a \equiv a_1 + a_2$ — Induktionsannahme: für alle m, n

$$\langle a_1,\sigma\rangle \to_{Aexp} m \iff (\sigma,m) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{A}}$$
$$\langle a_2,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \iff (\sigma,n) \in [\![a_2]\!]_{\mathcal{A}}$$

Dann;

$$\langle a_1+a_2,\sigma\rangle \to_{Aexp} m+n \overset{\text{(Def. } \langle\ldots\rangle\to_{Aexp}\text{)}}{\iff} \langle a_1,\sigma\rangle \to_{Aexp} m \overset{\text{IA für } a_1}{\iff} (\sigma,m) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{A}}$$
$$\& \qquad\qquad \&$$
$$\langle a_2,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \overset{\text{IA für } a_2}{\iff} (\sigma,n) \in [\![a_2]\!]_{\mathcal{A}}$$
$$\Updownarrow (Def.\ [\![.]\!]_{\mathcal{A}})$$
$$(\sigma, m+n) \in [\![a_1+a_2]\!]_{\mathcal{A}}$$

Beweis: $\forall a \in \mathbf{Aexp}.\forall n \in \mathbb{Z}.\forall \sigma.\ \langle a,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \iff (\sigma,n) \in [\![a]\!]_{\mathcal{A}}$

Induktionsschritte

- $a \equiv a_1/a_2$ — Induktionsannahme:

$$\langle a_1,\sigma\rangle \to_{Aexp} m \iff (\sigma,m) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{A}}$$
$$\langle a_2,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \iff (\sigma,n) \in [\![a_2]\!]_{\mathcal{A}}$$

1. Fall: $n \neq 0$

$$\langle a_1/a_2,\sigma\rangle \to_{Aexp} m/n \overset{\text{(Def. } \langle\ldots\rangle\to_{Aexp}\text{)}}{\iff} \langle a_1,\sigma\rangle \to_{Aexp} m \overset{\text{IA für } a_1}{\iff} (\sigma,m) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{A}}$$
$$\& \qquad\qquad \&$$
$$\langle a_2,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \overset{\text{IA für } a_2}{\iff} (\sigma,n) \in [\![a_2]\!]_{\mathcal{A}}$$
$$\Updownarrow (Def.\ [\![.]\!]_{\mathcal{A}})$$
$$(\sigma, m/n) \in [\![a_1/a_2]\!]_{\mathcal{A}}$$

Beweis: $\forall a \in \mathbf{Aexp}.\forall n \in \mathbb{Z}.\forall \sigma.\ \langle a,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \iff (\sigma,n) \in [\![a]\!]_{\mathcal{A}}$

Induktionsschritte

- $a \equiv a_1/a_2$ — Induktionsannahme:

$$\langle a_1,\sigma\rangle \to_{Aexp} m \iff (\sigma,m) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{A}}$$
$$\langle a_2,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \iff (\sigma,n) \in [\![a_2]\!]_{\mathcal{A}}$$

1. Fall: $n = 0$
   Dann gibt es kein v so dass $\langle a_1/a_2,\sigma\rangle \to_{Aexp} v$, aber auch $\sigma \notin dom[\![a_1/a_2]\!]_{\mathcal{A}}$.

q.e.d.

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} false \mid true$	Denotational $[\![b]\!]_{\mathcal{B}}$
1	$\langle \mathbf{1},\sigma\rangle \to_{Bexp} true$	$\{(\sigma, true) \mid \sigma \in \Sigma\}$
0	$\langle \mathbf{0},\sigma\rangle \to_{Bexp} false$	$\{(\sigma, false) \mid \sigma \in \Sigma\}$

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operat. $\langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} t$	Denotational $[\![b]\!]_{\mathcal{B}}$
$a_0 == a_1$	$\dfrac{\langle a_0,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \quad \langle a_1,\sigma\rangle \to_{Aexp} m \quad n=m}{\langle a_0 == a_1,\sigma\rangle \to_{Bexp} true}$ $\dfrac{\langle a_0,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \quad \langle a_1,\sigma\rangle \to_{Aexp} m \quad n\neq m}{\langle a_0 == a_1,\sigma\rangle \to_{Bexp} false}$	$\{(\sigma, true) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma,n_0) \in [\![a_0]\!]_{\mathcal{A}}, (\sigma,n_1) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{A}}, n_0 = n_1\}$ $\cup$ $\{(\sigma, false) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma,n_0) \in [\![a_0]\!]_{\mathcal{A}}, (\sigma,n_1) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{A}}, n_0 \neq n_1\}$
$a1 < a2$	analog	

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle a,\sigma\rangle \to_{Bexp} b$	Denotational $[\![b]\!]_{\mathcal{B}}$
b_1 && b_2	$\dfrac{\langle b_1,\sigma\rangle \to_{Bexp} false}{\langle b_1 \,\&\&\, b_2,\sigma\rangle \to false}$	$\{(\sigma, false) \mid (\sigma, false) \in [\![b_1]\!]_{\mathcal{B}}\}$
	$\dfrac{\langle b_1,\sigma\rangle \to_{Bexp} true \quad \langle b_2,\sigma\rangle \to_{Bexp} t}{\langle b_1 \,\&\&\, b_2,\sigma\rangle \to t}$	$\{(\sigma,t) \mid (\sigma, true) \in [\![b_1]\!]_{\mathcal{B}}, (\sigma,t) \in [\![b_2]\!]_{\mathcal{B}}\}$
$b_1 \,\|\|\, b_2$	analog	
$!n$	...	

Äquivalenz operationale und denotationale Semantik

- Zu zeigen Gleichung (2) von Folie 4:
- Für alle $b \in \mathbf{Bexp}$, für alle $t \in \mathbb{B}$, for alle Zustände σ:

$$\langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} t \iff (\sigma,t) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}$$

- Beweis Prinzip?per struktureller Induktion über b (unter Verwendung der Äquivalenz für AExp). (Warum?)

Beweis $\langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} t \iff (\sigma,t) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}$

Induktionsanfänge

- $b \equiv \mathbf{0}$:

$$\left.\begin{array}{l}\langle \mathbf{0},\sigma\rangle \to_{Bexp} false \\ [\![\mathbf{0}]\!]_{\mathcal{A}} = \{(\sigma', false) \mid \sigma' \in \Sigma\} \Rightarrow (\sigma, false) \in [\![\mathbf{0}]\!]_{\mathcal{B}}\end{array}\right] \iff$$

- $b \equiv \mathbf{1}$:

$$\left.\begin{array}{l}\langle \mathbf{1},\sigma\rangle \to_{Bexp} true \\ [\![\mathbf{1}]\!]_{\mathcal{A}} = \{(\sigma', true) \mid \sigma' \in \Sigma\} \Rightarrow (\sigma, true) \in [\![\mathbf{1}]\!]_{\mathcal{B}}\end{array}\right] \iff$$

Beweis $\langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} t \iff (\sigma,t) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}$

Induktionsschritte

- $b \equiv b_1 \&\& b_2$ — Induktionsannahme:

$$\langle b_1,\sigma\rangle \to_{Bexp} v \iff (\sigma,v) \in [\![b_1]\!]_{\mathcal{B}}$$
$$\langle b_2,\sigma\rangle \to_{Bexp} w \iff (\sigma,w) \in [\![b_2]\!]_{\mathcal{B}}$$

1. Fall $v = false$

$$\langle b_1 \&\& b_2,\sigma\rangle \to_{Bexp} false \overset{\text{(Def. } \langle ..,..\rangle \to_{Bexp})}{\iff} \langle b_1,\sigma\rangle \to_{Bexp} false \overset{\text{IA für } b_1}{\iff} (\sigma,false) \in [\![b_1]\!]_{\mathcal{B}}$$
$$\text{Def. } [\![.]\!]_{\mathcal{B}} \Updownarrow$$
$$(\sigma,false) \in [\![b_1 \&\& b_2]\!]_{\mathcal{B}}$$

Beweis $\langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} t \iff (\sigma,t) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}$

Induktionsschritte

- $b \equiv b_1 \&\& b_2$ — Induktionsannahme:

$$\langle b_1,\sigma\rangle \to_{Bexp} v \iff (\sigma,v) \in [\![b_1]\!]_{\mathcal{B}}$$
$$\langle b_2,\sigma\rangle \to_{Bexp} w \iff (\sigma,w) \in [\![b_2]\!]_{\mathcal{B}}$$

1. Fall $v = true$

$$\langle b_1 \&\& b_2,\sigma\rangle \to_{Bexp} w \overset{\text{(Def. } \langle ..,..\rangle \to_{Bexp})}{\iff} \langle b_1,\sigma\rangle \to_{Bexp} true \overset{\text{IA für } b_1}{\iff} (\sigma,true) \in [\![b_1]\!]_{\mathcal{B}}$$
$$\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\&$$
$$\langle b_2,\sigma\rangle \to_{Bexp} w \overset{\text{IA für } b_2}{\iff} (\sigma,w) \in [\![b_2]\!]_{\mathcal{B}}$$
$$\text{Def. } [\![.]\!]_{\mathcal{B}} \Updownarrow$$
$$(\sigma,w) \in [\![b_1 \&\& b_2]\!]_{\mathcal{B}}$$

q.e.d

Arbeitsblatt 4.3: Beweis Induktionsanfang

$\langle a_1 == a_2,\sigma\rangle \to_{Bexp} v \iff (\sigma,v) \in [\![a_1 == a_2]\!]_{\mathcal{B}}$

Beweist obige Aussage unter Verwendung des für arithmetische Ausdrücke geltenden Lemmas

$$\forall a \in \textbf{Aexp}.\, \forall n \in \mathbb{Z}.\, \forall \sigma.\, \langle a,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \iff (\sigma,n) \in [\![a]\!]_{\mathcal{A}}$$

1. Was sind die Annahmen?
2. Welche Fälle unterscheiden wir?

Beweis $\langle a_1 == a_2,\sigma\rangle \to_{Bexp} v \iff (\sigma,v) \in [\![a_1 == a_2]\!]_{\mathcal{B}}$

- Annahmen: für $n, m \in \mathbb{B}$:

$$\langle a_1,\sigma\rangle \to_{Aexp} m \iff (\sigma,m) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{B}}$$
$$\langle a_2,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \iff (\sigma,n) \in [\![a_2]\!]_{\mathcal{B}}$$

- 1. Fall: $v = true$ $(m = n)$

$$\langle a_1 == a_2,\sigma\rangle \to_{Bexp} true \overset{\text{(Def. } \langle ..,..\rangle \to_{Bexp})}{\iff} \langle a_1,\sigma\rangle \to_{Bexp} m \overset{\text{Annahme für } a_1}{\iff} (\sigma,m) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{A}}$$
$$\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\&$$
$$\langle a_2,\sigma\rangle \to_{Bexp} m \overset{\text{Annahme für } a_2}{\iff} (\sigma,m) \in [\![a_2]\!]_{\mathcal{A}}$$
$$\text{Def. } [\![.]\!]_{\mathcal{B}} \Updownarrow$$
$$(\sigma,true) [\![a_1 == a_2]\!]_{\mathcal{B}}$$

Beweis $\langle a_1 == a_2,\sigma\rangle \to_{Bexp} v \iff (\sigma,v) \in [\![a_1 == a_2]\!]_{\mathcal{B}}$

- Annahmen: für $m, n \in \mathbb{B}$:

$$\langle a_1,\sigma\rangle \to_{Aexp} m \iff (\sigma,m) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{B}}$$
$$\langle a_2,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \iff (\sigma,n) \in [\![a_2]\!]_{\mathcal{B}}$$

- 2. Fall: $v = false$ $(m \neq n)$

$$\langle a_1 == a_2,\sigma\rangle \to_{Bexp} false \overset{\text{(Def. } \langle ..,..\rangle \to_{Bexp})}{\iff} \langle a_1,\sigma\rangle \to_{Aexp} m \overset{\text{Annahme für } a_1}{\iff} (\sigma,m) \in [\![a_1]\!]_{\mathcal{A}}$$
$$\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\&$$
$$\langle a_2,\sigma\rangle \to_{Aexp} n \overset{\text{Annahme für } a_2}{\iff} (\sigma,n) \in [\![a_2]\!]_{\mathcal{A}}$$
$$\text{Def. } [\![.]\!]_{\mathcal{B}} \Updownarrow$$
$$(\sigma,false) [\![a_1 == a_2]\!]_{\mathcal{B}}$$

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$	Denotational $[\![c]\!]_{\mathcal{C}}$
$\{\}$	$\dfrac{}{\langle \{\},\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma}$	$[\![\{\}]\!]_{\mathcal{C}} = Id$
$c_1; c_2$	$\dfrac{\langle c_1,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \quad \langle c_2,\sigma'\rangle \to_{Stmt} \sigma''}{\langle c_1; c_2,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma''}$	$[\![c_1]\!]_{\mathcal{C}} \circ [\![c_2]\!]_{\mathcal{C}}$
$x = a$	$\dfrac{\langle a,\sigma\rangle \to_{Aexp} n}{\langle x = a,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma[x \mapsto n]}$	$\{(\sigma,\sigma[x \mapsto n]) \mid (\sigma,n) \in [\![a]\!]_{\mathcal{A}}\}$

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$	Denotational $[\![c]\!]_{\mathcal{C}}$
if (b) c_0	$\dfrac{\langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} true \quad \langle c_0,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'}$	$\{(\sigma,\sigma') \mid (\sigma,true) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}, (\sigma,\sigma') \in [\![c_0]\!]_{\mathcal{C}}\}$
else c_1	$\dfrac{\langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} false \quad \langle c_1,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'}$	$\{(\sigma,\sigma') \mid (\sigma,false) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}, (\sigma,\sigma') \in [\![c_1]\!]_{\mathcal{C}}\}$

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$	Denotational $[\![c]\!]_{\mathcal{C}}$
$\underbrace{\textbf{while } (b)\ c}_{w}$	$\dfrac{\langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} false}{\langle w,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma}$	$fix(\Gamma)$
	$\dfrac{\langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} true \quad \langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \quad \langle w,\sigma'\rangle \to_{Stmt} \sigma''}{\langle w,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma''}$	

mit

$$\Gamma(\varphi) = \{(\sigma,\sigma') \mid (\sigma,true) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}, (\sigma,\sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}} \circ \varphi\} \cup \{(\sigma,\sigma) \mid (\sigma,false) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}\}$$

Äquivalenz operationale und denotationale Semantik

- Zu zeigen Gleichung (1) von Folie 4:
- Für alle $c \in$ **Stmt**, für alle Zustände σ, σ':

$$\langle c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \iff (\sigma, \sigma') \in [\![c]\!]_C$$

- $\Longrightarrow$ Beweis Prinzip?
- $\Longleftarrow$ Beweis Prinzip?

Operationale Semantik: C0 Programme

- **Stmt** $c ::=$ **Idt** $=$ **Exp** | **if** (b) c_1 **else** c_2 | **while** (b) c | $c_1; c_2$ | $\{\}$

Regeln:

$$\frac{}{\langle \{\}, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma} \qquad \frac{\langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \in \mathbb{Z}}{\langle x = a, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma[x \mapsto n]} \qquad \frac{\langle c_1, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \quad \langle c_2, \sigma'\rangle \to_{Stmt} \sigma''}{\langle c_1; c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma''}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} true \quad \langle c_1, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\langle \textbf{if } (b) \ c_1 \ \textbf{else } c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'} \qquad \frac{\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} false \quad \langle c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\langle \textbf{if } (b) \ c_1 \ \textbf{else } c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} false}{\langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} true \quad \langle c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \quad \langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma'\rangle \to_{Stmt} \sigma''}{\langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma''}$$

Operationale Semantik: C0 Programme

- **Stmt** $c ::=$ **Idt** $=$ **Exp** | **if** (b) c_1 **else** c_2 | **while** (b) c | $c_1; c_2$ | $\{\}$

Regeln: **Programmstruktur**

$$\frac{\langle c_1, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \quad \langle c_2, \sigma'\rangle \to_{Stmt} \sigma''}{\langle c_1; c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma''} \ \searrow$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} true \quad \langle c_1, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\langle \textbf{if } (b) \ c_1 \ \textbf{else } c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'} \ \searrow$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} false \quad \langle c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\langle \textbf{if } (b) \ c_1 \ \textbf{else } c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'} \ \searrow$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} true \quad \langle c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \quad \langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma'\rangle \to_{Stmt} \sigma''}{\langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma''} \ \rightarrow$$

Strukturelle Induktion über c **nicht** möglich.

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} false}{\langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma} \ \searrow$$

Ableitungstiefe für Programme

- Die Ableitungstiefe einer Programmauswertung mittels Regeln der operationaler Semantik ist die **Anzahl der Regelanwendungen** mit Conclusion der Form $\langle ., . \rangle \to_{Stmt} ..$

$$\frac{\vdots \qquad \cdots \qquad \vdots}{Prämisse_1 \qquad\qquad Prämisse_n}$$
$$Conclusion$$

Operationale Semantik: C0 Programme

- **Stmt** $c ::=$ **Idt** $=$ **Exp** | **if** (b) c_1 **else** c_2 | **while** (b) c | $c_1; c_2$ | $\{\}$

Regeln: **Programmstruktur** **Ableitungstiefe**

$$\frac{\langle c_1, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \quad \langle c_2, \sigma'\rangle \to_{Stmt} \sigma''}{\langle c_1; c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma''} \ \searrow \ \searrow$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} true \quad \langle c_1, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\langle \textbf{if } (b) \ c_1 \ \textbf{else } c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'} \ \searrow \ \searrow$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} false \quad \langle c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\langle \textbf{if } (b) \ c_1 \ \textbf{else } c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'} \ \searrow \ \searrow$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} true \quad \langle c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \quad \langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma'\rangle \to_{Stmt} \sigma''}{\langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma''} \ \rightarrow \ \searrow$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} false}{\langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma} \ \searrow \ \searrow$$

Äquivalenz operationale und denotationale Semantik

- Für alle $c \in$ **Stmt**, für alle Zustände σ, σ':

$$\langle c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \iff (\sigma, \sigma') \in [\![c]\!]_C$$

- $\Longrightarrow$ Beweis Prinzip?per Induktion über **die (Tiefe der) Ableitung** in der operationalen Semantik (Warum?)
- $\Longleftarrow$ Beweis Prinzip?

Beweis: $\forall c \in$ **Stmt**. $\forall \sigma, \sigma'. \langle c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \Longrightarrow (\sigma, \sigma') \in [\![c]\!]_C$

Induktionsanfang — Ableitungstiefe 1

- Fall $c \equiv x = a$:

$$[\![x = a]\!]_C = \{(\sigma, \sigma[x \mapsto m]) | (\sigma, m) \in [\![a]\!]_A\}$$

Sei $\langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccc} \langle x = a, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma[x \mapsto m] & & \\ \Updownarrow \text{(Def. } \langle .,. \rangle \to_{Stmt} .\text{)} & & \\ \langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} m \in \mathbb{Z} & \xLeftrightarrow{\text{Lemma für } a} & (\sigma, m) \in [\![a]\!]_A \\ & & \text{Def. } [\![.]\!]_C \Downarrow \\ & & (\sigma, \sigma[x \mapsto m]) \in [\![x = a]\!]_C \end{array}$$

- Fall $c \equiv \{\}$: ...

Beweis: $\forall c \in$ **Stmt**. $\forall \sigma, \sigma'. \langle c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \Longrightarrow (\sigma, \sigma') \in [\![c]\!]_C$

Induktionsschritt:

- Fall $c \equiv$ **if**(b) c_1 **else** c_2:

$$[\![\textbf{if}(b) \ c_1 \ \textbf{else} \ c_2]\!]_C = \{(\sigma, \sigma') | (\sigma, \sigma') \in [\![c_1]\!]_C, (\sigma, true) \in [\![b]\!]_B\} \cup \{(\sigma, \sigma') | (\sigma, \sigma') \in [\![c_2]\!]_C, (\sigma, false) \in [\![b]\!]_B\}$$

  - Fall $\langle \sigma, b\rangle \to_{Bexp} true$ mit $\langle c_1, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$:

$$\begin{array}{ccccc} \langle \textbf{if}(b) \ c_1 \ \textbf{else} \ c_2, \sigma\rangle & \xRightarrow{\text{(Def. } \langle .,. \rangle \to_{Stmt} .\text{)}} & \langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} true & \xRightarrow{\text{Lemma für } b} & (\sigma, true) \in [\![b]\!]_B \\ & & \& & & \& \\ & & \langle c_1, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' & \xRightarrow{\text{IH für } c_1} & (\sigma, \sigma') \in [\![c_1]\!]_C \\ & & & & \text{Def. } [\![.]\!]_C \Downarrow \\ & & & & (\sigma, \sigma') \in [\![\textbf{if}(b) \ c_1 \ \textbf{else} \ c_2]\!]_C \end{array}$$

  - Fall $\langle \sigma, b\rangle \to_{Bexp} false$ mit $\langle c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$:

$$\begin{array}{ccccc} \langle \textbf{if}(b) \ c_1 \ \textbf{else} \ c_2, \sigma\rangle & \xRightarrow{\text{(Def. } \langle .,. \rangle \to_{Stmt} .\text{)}} & \langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} false & \xRightarrow{\text{Lemma für } b} & (\sigma, false) \in [\![b]\!]_B \\ & & \& & & \& \\ & & \langle c_2, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' & \xRightarrow{\text{IH für } c_2} & (\sigma, \sigma') \in [\![c_2]\!]_C \\ & & & & \Downarrow \end{array}$$

Beweis: $\forall c \in \textbf{Stmt}.\forall \sigma,\sigma'.\langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \Longrightarrow (\sigma,\sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}}$

Induktionsschritt:

- Fall $c \equiv \textbf{while}(b)\ c$: $\quad [\![\textbf{while}(b)\ c]\!]_{\mathcal{C}} = fix(\Gamma)$
  - Fall $\langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} true$ mit $\langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$, $\langle \textbf{while}(b)\ c,\sigma'\rangle \to_{Stmt} \sigma''$

$$\langle \textbf{while}(b)\ c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'' \overset{\text{(Def. } \langle ..,..\rangle \to_{Stmt} .\text{)}}{\Longleftrightarrow} \langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} true \overset{\text{Lemma für } b}{\Longleftrightarrow} (\sigma,true) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}$$

$$\&\qquad\qquad\qquad\qquad\&$$

$$\langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \overset{\text{IH für } \langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\Longrightarrow} (\sigma,\sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}}$$

$$\&\qquad\qquad\qquad\qquad\&$$

$$\langle \textbf{while}(b)\ c,\sigma'\rangle \to_{Stmt} \sigma'' \overset{\text{IH für } \langle \textbf{while}(b)\ c,\sigma'\rangle \to_{Stmt} \sigma''}{\Longrightarrow} (\sigma',\sigma'') \in [\![\textbf{while}(b)\ c]\!]_{\mathcal{C}}$$

$$\Big\Downarrow \text{Def. } [\![.]\!]_{\mathcal{C}}$$

$$(\sigma,\sigma'') \in [\![\textbf{while}(b)\ c]\!]_{\mathcal{C}}$$

  - Fall $\langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} false$, $\langle \textbf{while}(b)\ c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma$

$$\langle \textbf{while}(b)\ c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma \overset{\text{(Def. } \langle ..,..\rangle \to_{Stmt} .\text{)}}{\Longleftrightarrow} \langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} false \overset{\text{Lemma für } b}{\Longleftrightarrow} (\sigma,false) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}$$

$$\Big\Downarrow \text{Def. } [\![.]\!]_{\mathcal{C}}$$

$$(\sigma,\sigma) \in [\![\textbf{while}(b)\ c]\!]_{\mathcal{C}}$$

Äquivalenz operationale und denotationale Semantik

- Für alle $c \in \textbf{Stmt}$, für alle Zustände σ,σ':

$$\langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \Longleftrightarrow (\sigma,\sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}}$$

- $\Longrightarrow$ Beweis per Induktion über **die (Tiefe der) Ableitung** in der operationalen Semantik (Warum?)
- $\Longleftarrow$ Beweis Prinzip?per struktureller Induktion über c (Verwendung der Äquivalenz für arithmetische und boolsche Ausdrücke). Für die While-Schleife Rückgriff auf Definition des Fixpunkts und Induktion über die Teilmengen $\Gamma^i(\emptyset)$ des Fixpunkts. (Warum?)

Beweis: $\forall c \in \textbf{Stmt}.\forall \sigma,\sigma'.(\sigma,\sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}} \Longrightarrow \langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$

Induktionsanfang:

- Fall $c \equiv x = a$:

$$[\![x = a]\!]_{\mathcal{C}} = \{(\sigma,\sigma[x \mapsto t]) | (\sigma,t) \in [\![a]\!]_{\mathcal{A}}\}$$

$$(\sigma,\sigma[x \mapsto t]) \in [\![x = a]\!]_{\mathcal{C}} \wedge \underbrace{(\sigma,t) \in [\![a]\!]_{\mathcal{A}}}_{\langle a,\sigma\rangle \to_{Aexp} t}$$

$$\overset{\text{Lemma } \textbf{Aexp}}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{\text{Def. } \langle ..,..\rangle \to_{Stmt} .}{\Longrightarrow} \langle x = a,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma[x \mapsto t]$$

- Fall $c \equiv \{\,\}$

$$[\![\{\,\}]\!]_{\mathcal{C}} = \{(\sigma,\sigma) | \sigma \in \Sigma\}$$

$$(\sigma,\sigma) \in [\![\{\,\}]\!]_{\mathcal{C}}$$

$$\overset{\text{Def. } \langle ..,..\rangle \to_{Stmt} .}{\Longrightarrow} \langle \{\,\},\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma$$

Beweis: $\forall c \in \textbf{Stmt}.\forall \sigma,\sigma'.(\sigma,\sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}} \Longrightarrow \langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$

Induktionsschritt:

- Fall $\textbf{if}\ (b)\ c_1\ \textbf{else}\ c_2$:

$$[\![\textbf{if}\ (b)\ c_1\ \textbf{else}\ c_2]\!]_{\mathcal{C}} = \begin{array}{l}\{(\sigma,\sigma') | (\sigma,true) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}, (\sigma,\sigma') \in [\![c_1]\!]_{\mathcal{C}}\} \\ \cup \{(\sigma,\sigma') | (\sigma,false) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}, (\sigma,\sigma') \in [\![c_2]\!]_{\mathcal{C}}\}\end{array}$$

Induktionsannahme gilt für c_1 und c_2

- Fall: $(\sigma,true) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}$ mit $(\sigma,\sigma') \in [\![c_1]\!]_{\mathcal{C}}$

$$\begin{array}{rl} & (\sigma,true) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}} \wedge (\sigma,\sigma') \in [\![c_1]\!]_{\mathcal{C}} \\ \overset{\text{Lemma } \textbf{Bexp}}{\Longrightarrow} & \langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} true \wedge (\sigma,\sigma') \in [\![c_1]\!]_{\mathcal{C}} \\ \overset{\text{IA für } c_1}{\Longrightarrow} & \langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} true \wedge \langle c_1,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \\ \overset{\text{Def. } \langle ..,..\rangle \to_{Stmt} .}{\Longrightarrow} & \langle \textbf{if}\ (b)\ c_1\ \textbf{else}\ c_2,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \end{array}$$

- Fall: $(\sigma,false) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}$ mit $(\sigma,\sigma') \in [\![c_2]\!]_{\mathcal{C}}$

$$\begin{array}{rl} & (\sigma,false) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}} \wedge (\sigma,\sigma') \in [\![c_2]\!]_{\mathcal{C}} \\ \overset{\text{Lemma } \textbf{Bexp}}{\Longrightarrow} & \langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} false \wedge (\sigma,\sigma') \in [\![c_2]\!]_{\mathcal{C}} \\ \overset{\text{IA für } c_2}{\Longrightarrow} & \langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} false \wedge \langle c_2,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \\ \overset{\text{Def. } \langle ..,..\rangle \to_{Stmt} .}{\Longrightarrow} & \langle \textbf{if}\ (b)\ c_1\ \textbf{else}\ c_2,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \end{array}$$

Beweis: $\forall c \in \textbf{Stmt}.\forall \sigma,\sigma'.(\sigma,\sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}} \Longrightarrow \langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$

Induktionsschritt:

- Fall $\textbf{while}\ (b)\ c$

$$\begin{array}{l}[\![\textbf{while}\ (b)\ c]\!]_{\mathcal{C}} = fix(\Gamma) \\ \text{mit } \Gamma(s) = \{(\sigma,\sigma') \mid (\sigma,true) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}} \wedge (\sigma,\sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}} \circ s\} \\ \qquad \cup \{(\sigma,\sigma) \mid (\sigma,false) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}\}\end{array}$$

Induktionsannahme gilt für c

$$\begin{array}{rll} (\sigma,\sigma') \in [\![\textbf{while}\ (b)\ c]\!]_{\mathcal{C}} & \Longrightarrow (\sigma,\sigma') \in fix(\Gamma) & \text{nach Def. } [\![.]\!]_{\mathcal{C}} \\ & \Longrightarrow (\sigma,\sigma') \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma^i(\emptyset) & \text{nach Def. } fix(\Gamma) \\ & \Longrightarrow (\sigma,\sigma') \in \Gamma^i(\emptyset) \text{ für ein } i \in \mathbb{N} & \\ & \Longrightarrow \langle \textbf{while}\ (b)\ c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' & \text{nach (UB)} \end{array}$$

Unterbeweis: $\quad \forall i \in \mathbb{N}.(\sigma,\sigma') \in \Gamma^i(\emptyset) \Rightarrow \langle \textbf{while}\ (b)\ c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$ (UB)

Unterbeweis: $\forall i \in \mathbb{N}.(\sigma,\sigma') \in \Gamma^i(\emptyset) \Longrightarrow \langle \textbf{while}\ (b)\ c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$

Es gilt die Induktionsannahme für c:

$$\forall \rho,\rho'.(\rho,\rho') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}} \Rightarrow \langle c,\rho\rangle \to_{Stmt} \rho' \quad (*)$$

Beweis per Induktion über i:

- Induktionsanfang $i = 0$:

$$(\sigma,\sigma') \in \Gamma^0(\emptyset) \Longrightarrow (\sigma,\sigma') \in \emptyset \Longrightarrow false$$

Implikation trivialerweise erfüllt da $false \Longrightarrow P$ immer wahr

- Induktionsschritt $i \to i+1$:
- Induktionsannahme (UB) gilt für i

$$(\sigma,\sigma') \in \Gamma^{i+1}(\emptyset) \Longrightarrow (\sigma,\sigma') \in \Gamma(\Gamma^i(\emptyset))$$

$$\overset{\text{Def. } \Gamma}{\Longrightarrow} (\sigma,\sigma') \in \begin{array}{l}\{(\sigma,\sigma'') \mid (\sigma,true) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}, (\sigma,\sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}}, (\sigma',\sigma'') \in \Gamma^i(\emptyset)\} \\ \cup \{(\sigma,\sigma) \mid (\sigma,false) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}\}\end{array}$$

- Fallunterscheidung über Zugehörigkeit zur Teilmenge

Unterbeweis: $\forall i \in \mathbb{N}.(\sigma,\sigma') \in \Gamma^i(\emptyset) \Longrightarrow \langle \textbf{while}\ (b)\ c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$

Es gilt die Induktionsannahme für c:

$$\forall \rho,\rho'.(\rho,\rho') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}} \Rightarrow \langle c,\rho\rangle \to_{Stmt} \rho' \quad (*)$$

Beweis per Induktion über i:

- Induktionsschritt $i \to i+1$:
- Induktionsannahme (UB) gilt für i
- Fall $(\sigma,true) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}$ mit $(\sigma,\sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}}, (\sigma',\sigma'') \in \Gamma^i(\emptyset)$

$$(\sigma,\sigma'') \in \Gamma(\Gamma^i(\emptyset)) \Longrightarrow \underbrace{(\sigma,true) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}}_{\text{Lemma } \textbf{Bexp}} \wedge \underbrace{(\sigma,\sigma'') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}}}_{\text{IA (*)}} \wedge \underbrace{(\sigma'',\sigma') \wedge \Gamma^i(\emptyset)}_{\text{IA (UB) für } i}$$

$$\Longrightarrow \langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} true \wedge \langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \wedge \langle \textbf{while}\ (b)\ c,\sigma'\rangle \to_{Stmt} \sigma''$$

$$\Longrightarrow \langle \textbf{while}\ (b)\ c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma''$$

- Fall $(\sigma,false) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}$

$$(\sigma,\sigma') \in \Gamma(\Gamma^i(\emptyset)) \Longrightarrow (\sigma,false) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}} \wedge \sigma' = \sigma$$

$$\Longrightarrow \langle b,\sigma\rangle \to_{Bexp} false \wedge \sigma' = \sigma \qquad \text{Lemma für } \textbf{Bexp}$$

$$\Longrightarrow \langle \textbf{while}\ (b)\ c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' \qquad \square$$

Beweis: $\forall c \in \textbf{Stmt}.\forall \sigma,\sigma'.(\sigma,\sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}} \Longrightarrow \langle c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$

Induktionsschritt:

- Fall $\textbf{while}\ (b)\ c$

$$\begin{array}{l}[\![\textbf{while}\ (b)\ c]\!]_{\mathcal{C}} = fix(\Gamma) \\ \text{mit } \Gamma(s) = \{(\sigma,\sigma') \mid (\sigma,true) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}} \wedge (\sigma,\sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}} \circ s\} \\ \qquad \cup \{(\sigma,\sigma) \mid (\sigma,false) \in [\![b]\!]_{\mathcal{B}}\}\end{array}$$

Induktionsannahme gilt für c

$$\begin{array}{rll} (\sigma,\sigma') \in [\![\textbf{while}\ (b)\ c]\!]_{\mathcal{C}} & \Longrightarrow (\sigma,\sigma') \in fix(\Gamma) & \text{nach Def. } [\![.]\!]_{\mathcal{C}} \\ & \Longrightarrow (\sigma,\sigma') \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma^i(\emptyset) & \text{nach Def. } fix(\Gamma) \\ & \Longrightarrow (\sigma,\sigma') \in \Gamma^i(\emptyset) \text{ für ein } i \in \mathbb{N} & \\ & \Longrightarrow \langle \textbf{while}\ (b)\ c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma' & \text{nach (UB)} \end{array}$$

Unterbeweis: $\quad \forall i \in \mathbb{N}.(\sigma,\sigma') \in \Gamma^i(\emptyset) \Rightarrow \langle \textbf{while}\ (b)\ c,\sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma'$ (UB)

Zusammenfassung: Äquivalenz der Semantiken

- Wir haben gezeigt: für alle $c \in$ **Stmt**, für alle Zustände σ, σ'

$$\langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma' \iff (\sigma, \sigma') \in [\![c]\!]_{\mathcal{C}}$$

- Das ist äquivalent zu (für alle $c \in$ **Stmt**, für alle Zustände σ, σ'):

$$[\![c]\!]_{\mathcal{C}} = \{(\sigma, \sigma') \mid \langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'\}$$

- Insbesondere ist die Undefiniertheit gleich:
  wenn es keine Ableitung für c, σ gibt, dann ist auch $\sigma \notin [\![c]\!]_{\mathcal{C}}$.

Fahrplan