Korrekte Software: Grundlagen und Methoden

Vorlesung 10 vom 11.06.19

Modellierung und Spezifikation

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2019

Fahrplan

- Einführung
- Operationale Semantik
- Denotationale Semantik
- Äquivalenz der Operationalen und Denotationalen Semantik
- Der Floyd-Hoare-Kalkül
- Invarianten und die Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls
- Strukturierte Datentypen
- Verifikationsbedingungen
- Vorwärts mit Floyd und Hoare
- Modellierung
- Spezifikation von Funktionen
- Referenzen und Speichermodelle
- Funktionsaufrufe und das Framing-Problem
- Ausblick und Rückblick

Beispiel: Suche nach dem maximalen Element

```
1  // {0 < n}
2  i= 0;
3  r= 0;
4  while (i< n) {
5     if (a[r] < a[i]) {
6        r= i;
7        }
8     else {
9        }
10    i= i+1;
11    // {(∀j. 0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ i ≤ n ∧ 0 ≤ r < n}
12    }
13 // {(∀j. 0 ≤ j < n ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ r < n}
```

Beispiel: Sortierte Felder

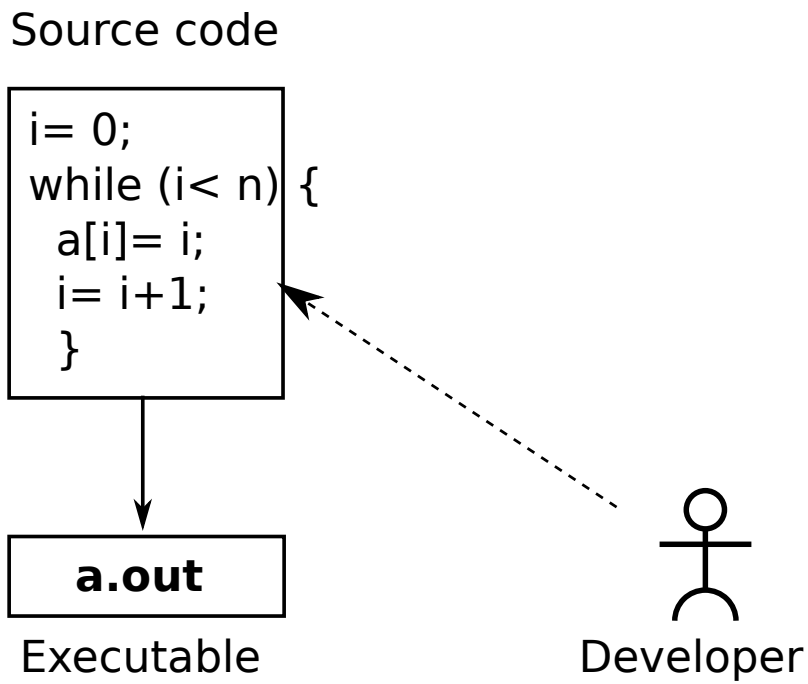
- Wie formulieren wir, dass ein Array sortiert ist? Ggf. bis zu einem bestimmten Punkt n sortiert ist?

```
int a[8];
```
// $\{\forall 0 \leq j \leq n < 6.a[j] \leq a[j+1]\}$

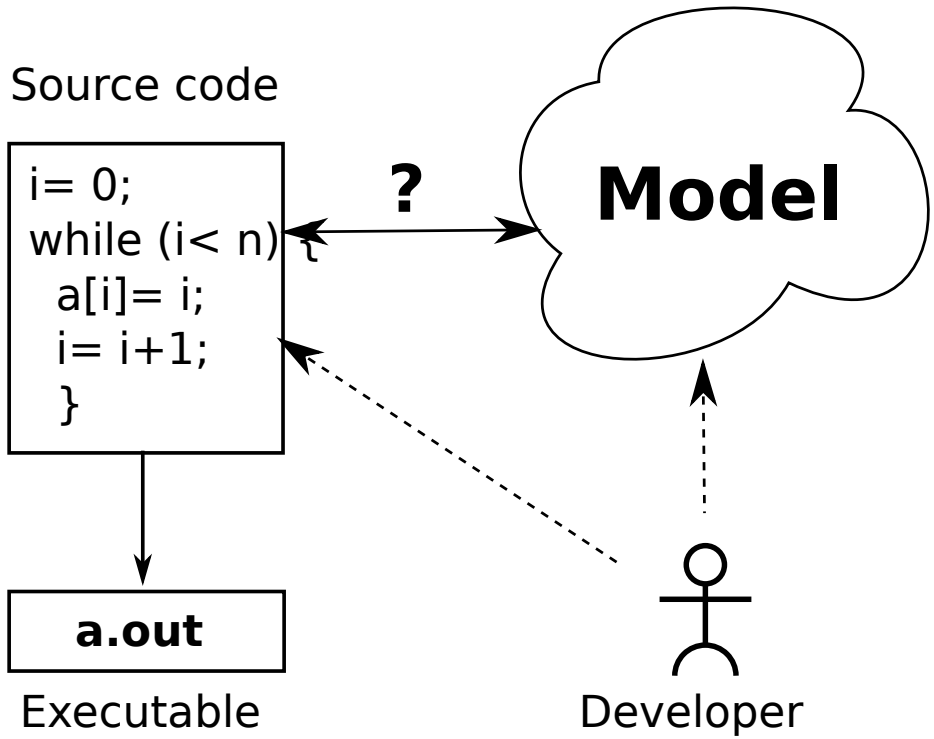
- Alternativ würden man auch gerne ein Prädikat definieren können

// $\{\forall a.sorteduntil(a, 0) \longleftrightarrow true\}$
// $\{\forall a.\forall i.i \geq 0 \longrightarrow (sorteduntil(a, i+1) \longleftrightarrow (a[i] \leq a[i+1] \wedge sorteduntil(a, i))$

Generelles Problem: Modellbildung



Generelles Problem: Modellbildung



Was brauchen wir?

- Expressive **logische Sprache** (**Assn**)
- Konzeptbildung auf der Modellebene
  - Funktionen
  - Typen
- Beispiele:
  - Separate Modellierungssprache, bspw. UML/OCL
  - Modellierungskonzepte in der Annotationssprache (ACSL, JML)

Modellierung von Typen: Integers

- Vereinfachung: **int** wird abgebildet auf $\mathbb{Z}$
- Das **kann** sehr falsch sein
- Manchmal **unerwartete** Effekte
- Behebung: statisch auf **Überlauf** prüfen
  - Nachteil: Plattformspezifisch

Binäre Suche

```
1  int binary_search(int val, int buf[], unsigned len)
2  {
3     // {0 ≤ len}
4     int low, high, mid, res;
5     low = 0; high = len;
6     while (low < high) {
7        mid= (low+ high)/2;
8        if (buf[mid] < val)
9           low = mid + 1;
10       else
11          high = mid;
12    }
13    if (low < len && buf[low] == val)
14       res= low;
15    else
16       res= -1;
17    // { res ≠ −1 ⟶ buf[res] = val ∧                    }
          res = −1 ⟶ ∀j.0 ≤ j < len ⟶ buf[j] ≠ val
18 }
```

Binäre Suche, korrekt

```
1  int binary_search(int val, int buf[], unsigned len)
2  {
3     // {0 ≤ len}
4     int low, high, mid, res;
5     low = 0; high = len;
6     while (low < high) {
7        mid= low+ (high−low)/2;
8        if (buf[mid] < val)
9           low = mid + 1;
10       else
11          high = mid;
12    }
13    if (low < len && buf[low] == val)
14       res= low;
15    else
16       res= −1;
17    // { res ≠ −1 ⟶ buf[res] = val ∧                    }
         res = −1 ⟶ ∀j.0 ≤ j < len ⟶ buf[j] ≠ val
18 }
```

Typen: reelle Zahlen

- Vereinfachung: **double** wird abgebildet auf $\mathbb{R}$
- Auch hier **Fehler** und **unerwartete Effekte** möglich:
  - Kein Überlauf, aber **Rundungsfehler**
  - Fließkommazahlen: Standard IEEE 754-2008
- Mögliche Abhilfe:
  - Spezifikation der Abweichung von **exakter** (ideeller) Berechnung

Typen: labelled records

- Passen gut zu Klassen (Klassendiagramme in der UML)
- Bis auf Methoden: impliziter Parameter `self`
  - Werden nicht behandelt

Typen: Felder

- Was repräsentiert **Felder**?
- **Sequenzen** (Listen)
- Modellierungssprache:
  - Annotation + **OCL**

Ein längeres Beispiel: reverse in-place

```
1   i= 0;
2   // {∀i.0 ≤ i < n ⟶ a[i] = b[i]}
3   while (i< n) {
4     // ???
5     tmp= a[n−1−i];
6     a[n−1−i]= a[i];
7     a[i]= tmp;
8     i= i+1;
9   }
10  // {∀j.0 ≤ j < n ⟶ a[i] = b[n − 1 − i]}
```

Ein längeres Beispiel: reverse in-place

```
1   i= 0;
2   // {∀i.0 ≤ i < n ⟶ a[i] = b[i]}
3   while (i< n/2) {
4     //
5     tmp= a[n−1−i];
6     a[n−1−i]= a[i];
7     a[i]= tmp;
8     i= i+1;
9   }
10  // {∀j.0 ≤ j < n ⟶ a[i] = b[n − 1 − i]}
```

Ein längeres Beispiel: reverse in-place

```
1   i= 0;
2   // {∀i.0 ≤ i < n ⟶ a[i] = b[i]}
3   while (i< n/2) {
4     // { ∀j.0 ≤ j < i ⟶ a[j] = b[n − 1 − j]∧
          ∀j.n − 1 − i < j < n ⟶ a[j] = b[n − 1 − j]∧
          ∀j.i ≤ j ≤ n − 1 − i ⟶ a[j] = b[j] }
5     tmp= a[n−1−i];
6     a[n−1−i]= a[i];
7     a[i]= tmp;
8     i= i+1;
9   }
10  // {∀j.0 ≤ j < n ⟶ a[i] = b[n − 1 − i]}
```

Vereinfacht mit Modellbildung

- seq(a, n) ist ein Feld der Länge n repräsentiert als Liste (Sequenz)
- Aktionen auf Sequenzen:
  - rev(a) — Reverse
  - $a[i : j]$ — Slicing (à la Python)
  - $++$ — Konkatenation

Ein längeres Beispiel, vereinfacht

```
1   i= 0;
2   // {bs = seq(a, n)}
3   while (i< n/2) {
4     //
5     tmp= a[n-1-i];
6     a[n-i-1]= a[i];
7     a[i]= tmp;
8     i= i+1;
9   }
10  // {as = seq(a, n) ⟹ rev(as) = bs}
```

Ein längeres Beispiel, vereinfacht

```
1   i= 0;
2   // {bs = seq(a, n)}
3   while (i< n/2) {
4     // { as = seq(a, n) ⟹
            rev(as[n − i : n])++as[i : n − i]++ rev(as[0 : i]) = bs}
5     tmp= a[n−1−i];
6     a[n−i−1]= a[i];
7     a[i]= tmp;
8     i= i+1;
9   }
10  // {as = seq(a, n) ⟹ rev(as) = bs}
```

Formelsprache mit Quantoren

- Wir brauchen Programmausdrücken wie **Aexp**
- Wir müssen neue Funktionen verwenden können
  - Etwa eine Fakultätsfunkion
- Wir müssen neue Prädikate definieren können
  - rev, *sorted*, ...
- Wir müssen Formeln bilden können
  - Analog zu **Bexp**
  - Zusätzlich mit Implikation $\longrightarrow$, Äquivalenz $\longleftrightarrow$
  - Zusätzlich Quantoren über logische Variablen wie in

$$(\forall j.\, 0 \leq j < n \longrightarrow P[j]) \wedge P[n] \longrightarrow \forall j.\, 0 \leq j < n+1 \longrightarrow P[j]$$

$$\forall i.i \geq 0 \longrightarrow (\mathit{sorteduntil}(a, i+1) \longleftrightarrow (a[i] \leq a[i+1] \wedge \mathit{sorteduntil}(a, i)))$$

Was brauchen wir?

- Definiere Terme als Variablen und Funktionen besimmter Stelligkeit
- Definiere Literale und Formeln
- Interpretation von Formeln
  - mit und ohne Programmvariablen

Zusicherungen (Assertions)

- Erweiterung von **Aexp** and **Bexp** durch
  - **Logische** Variablen **Var** $v := N, M, L, U, V, X, Y, Z$
  - Definierte Funktionen und Prädikate über **Aexp** $n!, \sum_{i=1}^{n} i, \ldots$
  - Implikation, Äquivalenzen und Quantoren $b_1 \longrightarrow b_2, b_1 \longleftrightarrow b_2, \forall v.\, b, \exists v.\, b$
- Formal:

$$
\begin{array}{rll}
\textbf{Lexp} & l ::= & \textbf{Idt} \mid l[a] \mid l.\textbf{Idt} \\
\textbf{Aexpv} & a ::= & \textbf{Z} \mid \textbf{Idt} \mid \textbf{Var} \mid \textbf{C} \mid \textbf{Lexp} \\
 & & \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 \times a_2 \\
 & & \mid f(e_1, \ldots, e_n) \\
\textbf{Assn} & b ::= & \textbf{1} \mid \textbf{0} \mid a_1 == a_2 \mid a_1 != a_2 \mid a_1 <= a_2 \\
 & & \mid !\, b \mid b_1 \,\&\&\, b2 \mid b_1 \,||\, b_2 \\
 & & \mid b_1 \longrightarrow b_2 \mid b_1 \longleftrightarrow b_2 \mid p(e_1, \ldots, e_n) \\
 & & \mid \forall v.\, b \mid \exists v.\, b
\end{array}
$$

Zusicherungen (Assertions)

- Erweiterung von **Aexp** and **Bexp** durch
  - **Logische** Variablen **Var** $v := N, M, L, U, V, X, Y, Z$
  - ~~Definierte Funktionen und Prädikate über **Aexp**~~ $n!, \sum_{i=1}^{n} i, \ldots$
  - Implikation, Äquivalenzen und Quantoren $b_1 \longrightarrow b_2, b_1 \longleftrightarrow b_2, \forall v.\, b, \exists v.\, b$
- Formal:

$$
\begin{array}{rll}
\textbf{Lexp} & l ::= & \textbf{Idt} \mid l[a] \mid l.\textbf{Idt} \\
\textbf{Aexpv} & a ::= & \textbf{Z} \mid \textbf{Idt} \mid \textbf{Var} \mid \textbf{C} \mid \textbf{Lexp} \\
 & & \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 \times a_2 \\
 & & \mid f(e_1, \ldots, e_n) \\
\textbf{Assn} & b ::= & \textbf{1} \mid \textbf{0} \mid a_1 == a_2 \mid a_1 != a_2 \mid a_1 <= a_2 \\
 & & \mid !\, b \mid b_1 \,\&\&\, b2 \mid b_1 \,||\, b_2 \\
 & & \mid b_1 \longrightarrow b_2 \mid b_1 \longleftrightarrow b_2 \mid p(e_1, \ldots, e_n) \\
 & & \mid \forall v.\, b \mid \exists v.\, b
\end{array}
$$

Zusicherungen (Assertions)

- Erweiterung von **Aexp** and **Bexp** durch
  - **Logische** Variablen **Var** $v := N, M, L, U, V, X, Y, Z$
  - Funktionen und Prädikate selbst definieren
  - Implikation, Äquivalenzen und Quantoren $b_1 \longrightarrow b_2, b_1 \longleftrightarrow b_2, \forall v.\, b, \exists v.\, b$
- Formal:

$$
\begin{array}{rll}
\textbf{Lexp} & l ::= & \textbf{Idt} \mid l[a] \mid l.\textbf{Idt} \\
\textbf{Aexpv} & a ::= & \textbf{Z} \mid \textbf{Idt} \mid \textbf{Var} \mid \textbf{C} \mid \textbf{Lexp} \\
 & & \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 \times a_2 \\
 & & \mid f(e_1, \ldots, e_n) \\
\textbf{Assn} & b ::= & \textbf{1} \mid \textbf{0} \mid a_1 == a_2 \mid a_1 != a_2 \mid a_1 <= a_2 \\
 & & \mid !\, b \mid b_1 \,\&\&\, b2 \mid b_1 \,||\, b_2 \\
 & & \mid b_1 \longrightarrow b_2 \mid b_1 \longleftrightarrow b_2 \mid p(e_1, \ldots, e_n) \\
 & & \mid \forall v.\, b \mid \exists v.\, b
\end{array}
$$

Erfüllung von Zusicherungen

- Wann gilt eine Zusicherung $b \in \mathbf{Assn}$ in einem Zustand σ?
  - Auswertung (denotationale Semantik) ergibt *true*
- **Belegung** der logischen Variablen: $I : \mathbf{Var} \to (\mathbf{Z} \cup \mathbf{C})$
- Semantik von b unter der Belegung I: $\mathcal{B}_v[\![b]\!]^I, \mathcal{A}_v[\![a]\!]^I$

$$\mathcal{A}_v[\![l]\!]^I = \{(\sigma, \sigma(i) \mid (\sigma, i) \in \mathcal{L}_v[\![l]\!]^I, i \in Dom(\sigma)\}$$

Erfüllung von Zusicherungen

- Wann gilt eine Zusicherung $b \in \mathbf{Assn}$ in einem Zustand σ?
  - Auswertung (denotationale Semantik) ergibt *true*
- **Belegung** der logischen Variablen: $I : \mathbf{Var} \to (\mathbf{Z} \cup \mathbf{C} \cup \text{Array})$
- Semantik von b unter der Belegung I:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_v[\![\forall v.b]\!]^I = \{&(\sigma, \mathit{true}) \mid \text{für alle } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, \mathit{true}) \in \mathcal{B}_v[\![b]\!]^{I[i/v]}\} \\
\cup \{&(\sigma, \mathit{false}) \mid \text{für ein } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, \mathit{false}) \in \mathcal{B}_v[\![b]\!]^{I[i/v]}\} \\
\mathcal{B}_v[\![\exists v.b]\!]^I = \{&(\sigma, \mathit{true}) \mid \text{für ein } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, \mathit{true}) \in \mathcal{B}_v[\![b]\!]^{I[i/v]}\} \\
\cup \{&(\sigma, \mathit{false}) \mid \text{für alle } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, \mathit{false}) \in \mathcal{B}_v[\![b]\!]^{I[i/v]}\}
\end{aligned}$$

Analog für andere Typen.

Erfülltheit von Zusicherungen

Erfülltheit von Zusicherungen

$b \in$ **Assn** ist in Zustand σ mit Belegung I erfüllt ($\sigma \models^I b$), gdw

$$\mathcal{B}_v[\![b]\!]^I(\sigma) = \mathit{true}$$

Formeln ohne Programmvariablen, ohne Arrays, ohne Strukturen

- Eine Formel $b \in$ **Assn** ist pur, wenn sie weder Programmvariablen, noch Strukturen, noch Felder enthält (also keine Teilterme aus **Lexp** und **Idt**.
- Eine Formel ist geschlossen, wenn sie pur ist und keine freien logischen Variablen enthält.
- Sei $\mathbf{Assn}^c \subseteq$ **Assn** die Menge der geschlossenen Formeln

Lemma

Für eine geschlossene Formel b ist der Wahrheitswert $\mathcal{B}_v[\![b]\!]^I(\sigma)$ von b unabhängig von I und σ.

- Sei Γ eine endliche Menge von Formeln, dann definieren wir

$$\bigwedge \Gamma := \begin{cases} b_1 \wedge \ldots \wedge b_n & \text{für alle } b_i \in \Gamma, \Gamma \neq \emptyset \\ \mathit{true} & \text{falls } \Gamma = \emptyset \end{cases}$$

Erfülltheit von Zusicherungen unter Kontext

Erfülltheit von Zusicherungen unter Kontext

Sei $\Gamma \subseteq \mathbf{Assn}^c$ eine endliche Menge und $b \in \mathbf{Assn}$. Im Kontext Γ ist b in Zustand σ mit Belegung I erfüllt ($\Gamma, \sigma \models^I b$), gdw

$$\mathcal{B}_v[\![\Gamma \longrightarrow b]\!]^I(\sigma) = \mathit{true}$$

Floyd-Hoare-Tripel mit Kontext

- Sei $\Gamma \in \mathbf{Assn}^c$ und $P, Q \subseteq \mathbf{Assn}$

Partielle Korrektheit unter Kontext ($\Gamma \models \{P\}\, c\, \{Q\}$)

c ist **partiell korrekt**, wenn für alle Zustände σ und alle Belegungen I die unter Kontext Γ P erfüllen, gilt:
wenn die Ausführung von c mit σ in σ' terminiert, **dann** erfüllen σ' und I im Kontext Γ auch Q.

$$\Gamma \models \{P\}\, c\, \{Q\} \iff \forall I.\, \forall \sigma.\, \Gamma, \sigma \models^I P \wedge \exists \sigma'.\, (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \implies \Gamma, \sigma' \models^I Q$$

Floyd-Hoare-Kalkül mit Kontext

$$\frac{}{\Gamma \vdash \{P[e/x]\}\, x = e\, \{P\}}$$

Floyd-Hoare-Kalkül mit Kontext

$$\frac{}{\Gamma \vdash \{P[e/x]\}\, x = e\, \{P\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{A \wedge b\}\, c_0\, \{B\} \qquad \Gamma \vdash \{A \wedge \neg b\}\, c_1\, \{B\}}{\Gamma \vdash \{A\}\ \textbf{if}\ (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1\, \{B\}}$$

Floyd-Hoare-Kalkül mit Kontext

$$\frac{}{\Gamma \vdash \{P[e/x]\}\, x = e\, \{P\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{A \wedge b\}\, c_0\, \{B\} \qquad \Gamma \vdash \{A \wedge \neg b\}\, c_1\, \{B\}}{\Gamma \vdash \{A\}\ \textbf{if}\ (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1\, \{B\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{A \wedge b\}\, c\, \{A\}}{\Gamma \vdash \{A\}\ \textbf{while}(b)\ c\, \{A \wedge \neg b\}}$$

Floyd-Hoare-Kalkül mit Kontext

$$\frac{}{\Gamma \vdash \{P[e/x]\}\, x = e\, \{P\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{A \wedge b\}\, c_0\, \{B\} \qquad \Gamma \vdash \{A \wedge \neg b\}\, c_1\, \{B\}}{\Gamma \vdash \{A\}\ \textbf{if}\ (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1\, \{B\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{A \wedge b\}\, c\, \{A\}}{\Gamma \vdash \{A\}\ \textbf{while}(b)\ c\, \{A \wedge \neg b\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{A\}\, c_1\, \{B\} \qquad \Gamma \vdash \{B\}\, c_2\, \{C\}}{\Gamma \vdash \{A\}\, c_1; c_2\, \{C\}}$$

Floyd-Hoare-Kalkül mit Kontext

$$\frac{\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A) \qquad \Gamma \vdash \{A\}\, c\, \{B\} \qquad \Gamma \longrightarrow (B \longrightarrow B')}{\Gamma \vdash \{A'\}\, c\, \{B'\}}$$

und es muss gezeigt werden für alle Zustände σ und Belegungen I dass $\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A)$ wahr bzw. dass

$$\mathcal{B}_v[\![\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A)]\!]^I(\sigma) = \mathit{true}$$

(Analog für $\Gamma \longrightarrow (B \longrightarrow B')$).

Floyd-Hoare-Kalkül mit Kontext

$$\frac{\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A) \qquad \Gamma \vdash \{A\}\, c\, \{B\} \qquad \Gamma \longrightarrow (B \longrightarrow B')}{\Gamma \vdash \{A'\}\, c\, \{B'\}}$$

und es muss gezeigt werden für alle Zustände σ und Belegungen I dass $\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A)$ wahr bzw. dass

$$\mathcal{B}_v[\![\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A)]\!]^I(\sigma) = \mathit{true}$$

(Analog für $\Gamma \longrightarrow (B \longrightarrow B')$).

Problem

$\mathcal{B}_v[\![.]\!]^I(\sigma)$ *im Allgemeinen nicht berechenbar wegen*

$$\mathcal{B}_v[\![\forall_{\mathbf{Z}} v.b]\!]^I = \{(\sigma,1) \mid \textit{für alle } i \in \mathbf{Z} \textit{ gilt } (\sigma,1) \in \mathcal{B}_v[\![b]\!]^{I[i/v]}\}$$
$$\cup \{(\sigma,0) \mid \textit{für ein } i \in \mathbf{Z} \textit{ gilt } (\sigma,0) \in \mathcal{B}_v[\![b]\!]^{I[i/v]}\}$$

Zusammenfassung

- Spezifikation erfordert **Modellbildung**
- Herangehensweisen:
  - Modellbildung in der Annotation (“ghost-code”)
  - Separate Modellierungssprache
- Erweiterung der Annotationssprache um logische Anteile
  - Quantoren, Typen, Kontexte
- Problem: Unvollständigkeit der Logik