Korrekte Software: Grundlagen und Methoden

Vorlesung 6 vom 14.05.19

Invarianten und die Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2019

Fahrplan

Invarianten

Invarianten Finden: die Fakultät

```
1 p= 1;
2 c= 1;
3 while (c <= n) {
4   p = p * c;
5   c = c + 1;
6 }
```

Invariante:

$$p = (c-1)! \wedge c - 1 \leq n \wedge c > 0$$

- Kern der Invariante: Fakultät bis $c-1$ berechnet.
- Invariante impliziert Nachbedingung
- Nebenbedingung für Weakening innerhalb der Schleife.

Invarianten finden

1. Initiale Invariante: momentaner Zustand der Berechnung
2. Invariante und negierte Schleifenbedingung muss Nachbedingung implizieren; ggf. Invariante verstärken.
3. Beweise innerhalb der Schleife benötigen ggf. weiter Nebenbedingungen; Invariante verstärken.

Zählende Schleifen

- Fakultät ist Beispiel für zählende Schleife (**for**).
- Für Nachbedingung ψ ist Invariante:

$$\psi[i-1/n] \wedge i - 1 \leq n$$

- Ggf. weitere Nebenbedingungen erforderlich

```
for (i= 0; i<= n; i++) {
  ...
  }
```

ist syntaktischer Zucker für

```
i= 0;
while (i<= n) {
  ...
  i= i+1;
  }
```


Beispiel 1

```
1 // {0 ≤ y}
2 x= 1;
3 c= 1;
4 while (c <= y) {
5   x= 2*x;
6   c= c+1;
7 }
8 // {x = 2^y}
```

- Invariante:

$$x = 2^{c-1} \wedge c - 1 \leq y$$

Beispiel 2

```
1 // {0 ≤ y}
2 x= 1;
3 c= 1;
4 while (c < y) {
5   c= c+1;
6   x= 2*x;
7 }
8 // {x = 2^y}
```

- Invariante:

$$x = 2^c \wedge c \leq y$$

Beispiel 2

```
1 // {0 ≤ y}
2 x= 1;
3 c= 0;
4 while (c < y) {
5   c= c+1;
6   x= 2*x;
7 }
8 // {x = 2^y}
```

- Invariante:

$$x = 2^c \wedge c \leq y$$

Beispiel 3

```
1 // {y = Y ∧ 0 ≤ y}
2 x= 1;
3 while (y != 0) {
4   x= 2*x;
5   y= y-1;
6 }
7 // {x = 2^Y}
```

- Invariante:

$$x = 2^{Y-y}$$

Beispiel 4

```
1 // {0 ≤ a}
2 r= a;
3 q= 0;
4 while (b <= r) {
5     r= r-b;
6     q= q+1;
7     }
8 // {a = b*q + r ∧ 0 ≤ r ∧ r < b}
```

Invariante:

$$a = b \cdot q + r \wedge 0 \leq r$$

- Spezieller Fall: letzter Teil der Nachbedingung ist genau negierte Schleifeninvariante

Beispiel 5

```
1 // {0 ≤ a}
2 t= 1;
3 s= 1;
4 i= 0;
5 while (s <= a) {
6     t= t+ 2;
7     s= s+ t;
8     i= i+ 1;
9     }
10 // {i^2 ≤ a ∧ a < (i+1)^2}
```

- Was berechnet das? Ganzzahlige Wurzel von a.
- Invariante:

$$s-t \leq a \wedge t = 2 \cdot i+1 \wedge s = i^2+t$$

- Nachbedingung 1: aus $s - t \leq a, s = i^2 + t$ folgt $i^2 \leq a$.
- Nachbedingung 2: aus $s = i^2 + t, t = 2 \cdot i + 1$ und $a < s$ folgt $a < (i+1)^2$.

Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls

Floyd-Hoare-Tripel: Gültigkeit und Herleitbarkeit

- Definition von letzter Woche: $P, Q \in \mathbf{Assn}, c \in \mathbf{Stmt}$

  $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$ "Hoare-Tripel gilt" (semantisch)

  $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$ "Hoare-Tripel herleitbar" (syntaktisch)

- **Frage**: $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\} \overset{?}{\rightsquigarrow} \models \{P\}\, c\, \{Q\}$
- **Korrektheit**: $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\} \overset{?}{\Longrightarrow} \models \{P\}\, c\, \{Q\}$
  - Wir können nur gültige Eigenschaften von Programmen herleiten.
- **Vollständigkeit**: $\models \{P\}\, c\, \{Q\} \overset{?}{\Longrightarrow} \vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$
  - Wir können alle gültigen Eigenschaften auch herleiten.

Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls

Der Floyd-Hoare-Kalkül ist korrekt.

Wenn $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$, dann $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$.

Beweis:

- Definition von $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$:

$$\models \{P\}\, c\, \{Q\} \iff \forall I.\, \forall \sigma.\, \sigma \models^I P \wedge \exists \sigma'.\, (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \Longrightarrow \sigma' \models^I Q$$

- Beweis durch **Regelinduktion** über der **Herleitung** von $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$.
- Bsp: Zuweisung, Sequenz, Weakening, While.
  - Zuweisung benötigt Lemma: $\sigma \models^I B[e/x] \iff \sigma[\mathcal{A}[\![e]\!](\sigma)/x] \models^I B$
  - While-Scheliefe erfordert Induktion über Fixpunkt-Konstruktion

Vollständigkeit der Floyd-Hoare-Logik

Floyd-Hoare-Logik ist vollständig modulo weakening.

Wenn $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$, dann $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$ bis auf die Bedingungen der Weakening-Regel.

- Beweis durch Konstruktion einer schwächsten Vorbedingung $\mathrm{wp}(c, Q)$.
  - Problemfall: while-Schleife.

Vollständigkeitsbeweis

- Zu Zeigen:

$$\forall c \in \textbf{Stmt}.\forall Q \in \textbf{Assn}.\exists \mathrm{wp}(c,Q).\forall I.\forall \sigma.\sigma \models^I \mathrm{wp}(c,Q) \Rightarrow \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma \models^I Q$$

- Beweis per struktureller Induktion über c:
  - $c \equiv \{\}$: Wähle $\mathrm{wp}(\{\},Q) := Q$
  - $c \equiv X = a$: wähle $\mathrm{wp}(X=a,Q) := Q[a/x]$
  - $c \equiv c_0; c_1$: Wähle $\mathrm{wp}(c_0;c_1,Q) := \mathrm{wp}(c_0,\mathrm{wp}(c_1,Q))$
  - $c \equiv$ **if** b c_0 **else** c_1: Wähle $\mathrm{wp}(c,Q) := (b \wedge \mathrm{wp}(c_0,Q)) \vee (\neg b \wedge \mathrm{wp}(c_1,Q))$
  - $c \equiv$ **while** (b) c_0: ??

Vollständigkeitsbeweis: while

- $c \equiv$ **while** (b) c_0:
  Wie müssen eine Formel finden ($\mathrm{wp}($**while** (b) $c_0, Q)$) die alle σ charakterisiert, so dass

$$\sigma \models^I \mathrm{wp}(\textbf{while}\ (b)\ c_0, Q)$$
$$\longleftrightarrow \forall k \geq 0 \forall \sigma_0,\ldots,\sigma_k.\quad \sigma = \sigma_0 \wedge \forall 0 \leq i < k.(\sigma_i \models^I b \wedge \underbrace{\mathcal{C}[\![c_0]\!]\sigma_i = \sigma_{i+1}}_{c_0 \text{ terminiert auf } \sigma_i \text{ in } \sigma_{i+1}}) \Rightarrow \sigma_k \models^I b \vee Q$$

- Es gibt so eine Formel ausdrückbar in **Assn**, die im Wesentlichen darauf aufbaut, dass
  1. jede Sequenz an Werten, die die Programmvariablen $\overline{X}$ in b und c_0 annehmen, mittels einer Formel beschrieben werden kann (β-Prädikat)
  2. $\mathrm{wp}(c_0, \overline{X} = \overline{\sigma_{i+1}(X)})$ die Formel beschreibt, was vor c_0 gelten muss, damit hinterher die Programmvariablen $\overline{X}$ die Werte $\overline{\sigma_{i+1}(X)}$ haben
  3. $\neg\,\mathrm{wp}(c_0, \mathit{false})$ beschreibt was vor c_0 nicht gelten darf, damit c_0 nicht terminiert.

Vollständigkeit der Floyd-Hoare-Logik

Floyd-Hoare-Logik ist vollständig modulo weakening.

Wenn $\models \{P\}\,c\,\{Q\}$, dann $\vdash \{P\}\,c\,\{Q\}$ bis auf die Bedingungen der Weakening-Regel.

- Beweis durch Konstruktion einer schwächsten Vorbedingung $\mathrm{wp}(c,Q)$.
  - Problemfall: while-Schleife.
- Vollständigkeit (relativ):

$$\models \{P\}\,c\,\{Q\} \Leftrightarrow P \Rightarrow \mathrm{wp}(c,Q)$$

- Wenn wir eine gültige Zusicherung nicht herleiten können, liegt das nur daran, dass wir eine Beweisverpflichtung nicht beweisen können.
- Logik erster Stufe ist unvollständig, also **können** wir gar nicht besser werden.

Zusammenfassung

- Invarianten finden in **drei Schritten**,
- Floyd-Hoare-Logik ist **korrekt**, wir können nur gültige Zusicherungen herleiten.
- Floyd-Hoare-Logik ist **vollständig** bis auf das Weakening.