Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 1 vom 04.04.18: Einführung

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Organisatorisches

- Veranstalter:

Christoph Lüth
christoph.lueth@dfki.de
MZH 4186, Tel. 59830

Serge Autexier
serge.autexier@dfki.de
Cartesium 2.11, Tel. 59834

- Termine:
  - Vorlesung: Dienstag, 12 – 14, MZH 6210
  - Übung: Donnerstag, 12 – 14, MZH 1110
- Webseite:

`http://www.informatik.uni-bremen.de/~cxl/lehre/ksgm.ss18`

Übungsbetrieb

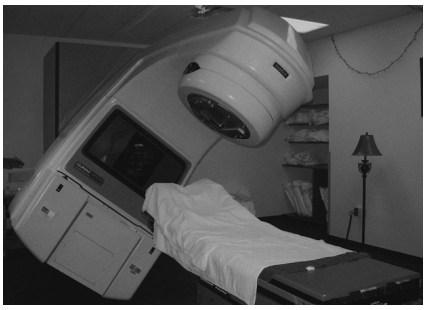
- "Leichtgewichtige" Übungsblätter, die **in der Übung** bearbeitet und **schnell** korrigiert werden können.
- Übungsblätter **vertiefen** Vorlesungsstoff, Bewertung gibt Feedback.
- Übungsbetrieb:
  - Gruppen bis zu drei Studierende
  - Ausgabe: Donnerstag in der Übung
  - Bearbeitung: in der Übung
  - Abgabe: Donnerstag abend

Prüfungsform und Übungsbetrieb

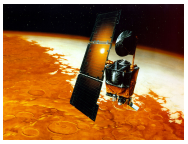
- 10 Übungsblätter (geplant)
- Bewertung:
  - A (sehr gut, 1.3) — nichts zu meckern, keine/kaum Fehler
  - B (gut, 2.3) — kleine Fehler, sonst gut
  - C (befriedigend, 3.3) — größere Fehler oder Mängel
  - Nicht bearbeitet — oder zu viele Fehler
- Prüfungsleistung:
  - Mündliche Prüfung
    - Einzelprüfung ca. 20– 30 Minuten
  - Übungsbetrieb (bis zu 20% Bonuspunkte, keine Voraussetzung)

Warum Korrekte Software?

Software-Disaster I: Therac-25



Software-Disasters II: Space



Mariner 1 (27.08.1962), Mars Climate Orbiter (1999), Ariane 5 (04.06.1996)

Software-Disaster III: AT&T (15.01.1990)

```
while (! empty(ring_rcv_buffer)
       && ! empty(side_buffer empty)) {
 initialize pointer to first message buffer;
 get copy of buffer;
 switch (message) {
   case (incoming_message):
     if (sender is out_of_service) {
       if (empty(ring_wrt_buffer)) {
         send "in service" to status map;
       } else {
         break;
       }
       process incoming message, set up pointers;
       break;
       }
   }
 do optional parameter work;
 }
```

Software-Disaster IV: Airbus A400M

Sevilla, 09.05.2015

Inhalt der Vorlesung

Themen

Korrekte Software im Lehrbuch:
- Spielzeugsprache
- Wenig Konstrukte
- Kleine Beispiele

Korrekte Software im Einsatz:
- Richtige Programmiersprache
- Mehr als nur ganze Zahlen
- Skalierbarkeit — wie können große Programme verifiziert werden?

Inhalt

- Grundlagen:
  - Beweis der **Korrektheit** von Programmen: der **Floyd-Hoare-Kalkül**
  - **Bedeutung** von Programmen: **Semantik**
- Betrachtete Programmiersprache: "C0" (erweiterte Untermenge von C)
- Erweiterung der Programmkonstrukte und des Hoare-Kalküls:
  1. Referenzen (Zeiger)
  2. Funktion und Prozeduren (Modularität)
  3. Reiche **Datenstrukturen** (Felder, `struct`)

Fahrplan

- Einführung
- Operationale Semantik
- Denotationale Semantik
- Äquivalenz der Operationalen und Denotationalen Semantik
- Die Floyd-Hoare-Logik
- Invarianten und die Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls
- Strukturierte Datentypen
- Modellierung und Spezifikation
- Verifikationsbedingungen
- Vorwärts mit Floyd und Hoare
- Funktionen und Prozeduren
- Referenzen
- Ausblick und Rückblick

Warum Semantik?

Idee

- Was wird hier berechnet? $p = n!$
- Warum? Wie können wir das **beweisen**?
- Wir berechnen symbolisch, welche Werte Variablen über den Programmverlauf annehmen.

```
p= 1;
c= 1;
while (c <= n) {
  p = p * c;
  c = c + 1;
}
```


Semantik von Programmiersprachen

Drei wesentliche Möglichkeiten:

- **Operationale Semantik**:
  Ausführung auf einer **abstrakten** Maschine
- **Denotationale Semantik**:
  Abbildung in ein **mathematisches Objekt**
- **Axiomatische Semantik**:
  Beschreibung durch eines Programmes durch seine **Eigenschaften**

Unsere Sprache C0

- C0 ist eine **Untermenge** der Sprache C
- C0-Programme sind **ausführbare** C-Programme
- Erste Ausbaustufe:
  - Zuweisungen, Fallunterscheidungen, Schleifen
  - Datentypen: ganze Zahlen mit Arithmetik
  - Relationen: Vergleich ($=, \leq$)
  - Boolsche Operatoren: Konjunktion, Disjunktion, Negation
- 1. Ausbaustufe: Funktionen und Prozeduren
- 2. Ausbaustufe: Felder und Strukturen
- 3. Ausbaustufe: Referenzen (Pointer)
- Fehlt: **union**, **goto**, ...

Operationale Semantik

- Kernkonzept: Zustandstandsübergänge einer abstrakten Maschine
- Abstrakte Maschine hat **impliziten Zustand**
- Zustand ordnet **Adressen** veränderliche **Werten** zu
- Konkretes Beispiel: $n \mapsto 3$, p und c undefiniert

```
p = 1;
c = 1;
while(c <= n){
  p = p * c;
  c = c + 1; }
```

p	?
c	?
n	3

$\rightsquigarrow$

p	1
c	?
n	3

$\rightsquigarrow$

p	1
c	1
n	3

$\rightsquigarrow$

p	1
c	1
n	3

$\rightsquigarrow$

p	1
c	2
n	3

$\rightsquigarrow$

p	2
c	2
n	3

$\rightsquigarrow$

p	2
c	3
n	3

$\rightsquigarrow$

p	6
c	3
n	3

$\rightsquigarrow$

p	6
c	4
n	3

Denotationale Semantik

- Kernkonzept: Abbildung von Programmen auf mathematisches Gegenstück (**Denotat**)
- **Partielle** Funktionen zwischen Zuständen $[\![c]\!] : \sigma \rightharpoonup \sigma$
- Beispiel:

```
p = 1;
c = 1; // p1
while (c <= n) {
  p = p * c;
  c = c + 1; // p2
  }
// p3
```

$$[\![p_1]\!](\sigma) = \sigma(p \mapsto 1)(c \mapsto 1)$$
$$[\![p_2]\!](\sigma) = \sigma(p \mapsto \sigma(p) * \sigma(c))(c \mapsto \sigma(c) + 1)$$
$$[\![p_3]\!](\sigma)[\![p_3]\!] = ???fix([\![p_2]\!])([\![p_1]\!](\sigma))fix([\![p_2]\!]) \circ [\![p_1]\!]$$

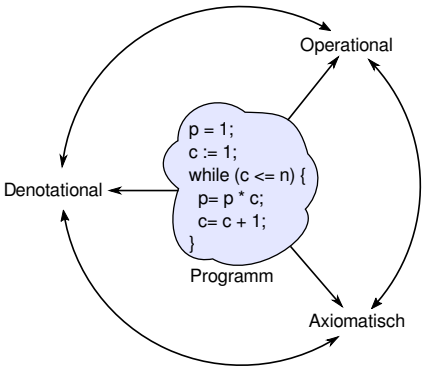
Axiomatische Semantik

- Kernkonzept: Charakterisierung von Programmen durch **Zusicherungen**
- Zusicherungen sind zustandsabhängige Prädikate
- Beispiel (mit $n = 3$)

```
// (1)
p = 1; // (2)
c = 1; // (3)
while(c <= n){
  // (4)
  p = p * c;
  c = c + 1; }
// (5)
```

(1)
(2)
(3)
(4)
$(p = 1 \wedge c = 1 \vee p = 1 \wedge c = 2 \vee p = (c-1)! \wedge n =$
$p = 2 \wedge c = 3 \vee p = 6 \wedge c = 4)$
$\wedge n = 3$
(5)

Drei Semantiken — Eine Sicht



Zusammenfassung

- Wir wollen die **Bedeutung** (Semantik) von Programmen beschreiben, um ihre Korrektheit beweisen zu können.
- Dazu gibt es verschiedene Ansätze, die wir betrachten werden.
- Nächste Woche geht es mit dem ersten los: **operationale** Semantik

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 2 vom 10.04.18: Operationale Semantik

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Fahrplan

Zutaten

```
// GGT(A,B)
if (a == 0) r = b;
else {
  while (b != 0) {
   if (a <= b)
      b = b - a;
   else a = a - b;
  }
  r = a;
}
```

- Programme berechnen **Werte**
- Basierend auf
  - Werte sind **Variablen** zugewiesen
  - Evaluation von **Ausdrücken**
- Folgt dem Programmablauf

Unsere Programmiersprache

Wir betrachten einen Ausschnitt der Programmiersprache **C** (**C0**).

Ausbaustufe 1 kennt folgende Konstrukte:

- Typen: **int**;
- Ausdrücke: Variablen, Literale (für ganze Zahlen), arithmetische Operatoren (für ganze Zahlen), Relationen ($==, <, \ldots$), boolsche Operatoren (&&, ||);
- Anweisungen:
  - Fallunterscheidung (**if**...**else**...), Iteration (**while**), Zuweisung, Blöcke;
  - Sequenzierung und leere Anweisung sind implizit

Semantik von C0

- Die (operationale) Semantik einer imperativen Sprache wie C0 ist ein **Zustandsübergang**: das System hat einen impliziten Zustand, der durch Zuweisung von **Werten** an **Adressen** geändert werden kann.

Systemzustände

- Ausdrücke werten zu **Werten** $\mathbf{V}$ (hier ganze Zahlen) aus.
- Adressen $\mathbf{Loc}$ sind hier Programmvariablen (Namen)
- Ein **Systemzustand** bildet Adressen auf Werte ab: $\Sigma = \mathbf{Loc} \rightharpoonup \mathbf{V}$
- Ein Programm bildet einen Anfangszustand **möglicherweise** auf einen Endzustand ab (wenn es terminiert).
- Zusicherungen sind Prädikate über dem Systemzustand.

C0: Ausdrücke und Anweisungen

$$
\begin{array}{rll}
\textbf{Aexp} & a ::= & \mathbf{Z} \mid \mathbf{Idt} \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1/a_2 \\
\textbf{Bexp} & b ::= & \mathbf{1} \mid \mathbf{0} \mid a_1 == a_2 \mid a_1 < a_2 \mid !\, b \mid b_1 \,\&\&\, b_2 \mid b_1 \,||\, b_2 \\
\textbf{Exp} & e := & a \mid b \\
\textbf{Stmt} & c ::= & \mathbf{Idt} = \mathbf{Exp} \\
 & \mid & \textbf{if}\ (b)\ c_1\ \textbf{else}\ c_2 \\
 & \mid & \textbf{while}\ (b)\ c \\
 & \mid & c_1; c_2 \\
 & \mid & \{\,\}
\end{array}
$$

NB: Nicht die **konkrete** Syntax.

Eine Handvoll Beispiele

```
// {y = Y ∧ y ≥ 0}
x = 1;
while (y != 0) {
 y = y-1;
 x = 2*x;
}
// {x = 2^Y}
```

```
// {a ≥ 0 ∧ b ≥ 0}
r = b;
q = 0;
while (b <= r) {
   r = r-a;
   q = q+1;
   }
// {a = b*q + r ∧ r < b}
```

```
p = 1;
c = 1;
while (c<=n) {
   c = c+1;
   p = p*c;
}
// {p = n!}
```

```
// {0 ≤ a}
t = 1;
s = 1;
i = 0;
while (s <= a) {
   t = t + 2;
   s = s + t;
   i = i + 1;
   }
// {i^2 ≤ a ∧ a < (i+1)^2}
```


Operationale Semantik: Arithmetische Ausdrücke

Ein arithmetischer Ausdruck a wertet unter gegebenen Zustand σ zu einer ganzen Zahl n (Wert) aus oder zu einem Fehler $\perp$.

- **Aexp** $a ::= \mathbf{Z} \mid \mathbf{Idt} \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1 \,/\, a_2$
- Zustände bilden Adressen/Programmvariablen auf **Werte** ab (σ)

$$\langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} n|\perp$$

Regeln:

$$\frac{}{\langle n, \sigma\rangle \to_{Aexp} n}$$

$$\frac{x \in \mathbf{Loc}, x \in Dom(\sigma), \sigma(x) = v}{\langle x, \sigma\rangle \to_{Aexp} v} \qquad \frac{x \in \mathbf{Loc}, x \notin Dom(\sigma)}{\langle x, \sigma\rangle \to_{Aexp} \perp}$$

Operationale Semantik: Arithmetische Ausdrücke

- **Aexp** $a ::= \mathbf{Z} \mid \mathbf{Idt} \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1 \ / \ a_2$

$$\langle a, \sigma \rangle \to_{Aexp} n \underline{\perp}$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_2 \qquad n_i \in \mathbf{Z}, n \text{ Summe } n_1 \text{ und } n_2}{\langle a_1 + a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n}$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_2 \qquad \text{falls } n_1 = \perp \text{ oder } n_2 = \perp}{\langle a_1 + a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} \perp}$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_2 \qquad n_i \in \mathbf{Z}, n \text{ Diff. } n_1 \text{ und } n_2}{\langle a_1 - a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n}$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_2 \qquad \text{falls } n_1 = \perp \text{ oder } n_2 = \perp}{\langle a_1 - a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} \perp}$$

Operationale Semantik: Arithmetische Ausdrücke

- **Aexp** $a ::= \mathbf{Z} \mid \mathbf{Idt} \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1 \ / \ a_2$

$$\langle a, \sigma \rangle \to_{Aexp} n | \perp$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_2 \qquad n_i \in \mathbf{Z}, n \text{ Produkt } n_1 \text{ und } n_2}{\langle a_1 * a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n}$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_2 \qquad \text{falls } n_1 = \perp \text{ oder } n_2 = \perp}{\langle a_1 * a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} \perp}$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_2 \qquad n_i \in \mathbf{Z}, n_2 \neq 0, n \text{ Quotient } n_1, n_2}{\langle a_1 / a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n}$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_2 \qquad \text{falls } n_1 = \perp, n_2 = \perp \text{ oder } n_2 = 0}{\langle a_1 / a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} \perp}$$

Beispiel-Ableitungen

Sei $\sigma(x) = 6, \sigma(y) = 5$.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\langle x, \sigma \rangle \to_{Aexp} 6 \qquad \langle y, \sigma \rangle \to_{Aexp} 5}{\langle x + y, \sigma \rangle \to_{Aexp} 11} \qquad \dfrac{\langle x, \sigma \rangle \to_{Aexp} 6 \qquad \langle y, \sigma \rangle \to_{Aexp} 5}{\langle x - y, \sigma \rangle \to_{Aexp} 1}}{\langle (x + y) * (x - y), \sigma \rangle \to_{Aexp} 11}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\langle x, \sigma \rangle \to_{Aexp} 6 \qquad \langle x, \sigma \rangle \to_{Aexp} 6}{\langle x * x, \sigma \rangle \to_{Aexp} 36} \qquad \dfrac{\langle y, \sigma \rangle \to_{Aexp} 5 \qquad \langle y, \sigma \rangle \to_{Aexp} 5}{\langle y * y, \sigma \rangle \to_{Aexp} 25}}{\langle (x * x) - (y * y), \sigma \rangle \to_{Aexp} 11}$$

Operationale Semantik: Boolesche Ausdrücke

- **Bexp** $b ::= 0 \mid 1 \mid a_1 == a_2 \mid a_1 \ < a_2 \mid !b \mid b_1 \ \&\& \ b2 \mid b_1 \ || \ b_2$

Regeln:

$$\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1 | 0 | \perp$$

$$\overline{\langle \mathbf{1}, \sigma \rangle \to_{Bexp} \mathbf{1}} \qquad \overline{\langle \mathbf{0}, \sigma \rangle \to_{Bexp} \mathbf{0}}$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_2 \qquad n_i \neq \perp, n_1 \text{ und } n_2 \text{ gleich}}{\langle a_1 == a_2, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1}$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_2 \qquad n_i \neq \perp, n_1 \text{ und } n_2 \text{ ungleich}}{\langle a_1 == a_2, \sigma \rangle \to_{Bexp} 0}$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n_2 \qquad n_1 = \perp \text{ or } n_2 = \perp}{\langle a_1 == a_2, \sigma \rangle \to_{Bexp} \perp}$$

Operationale Semantik: Boolesche Ausdrücke

- **Bexp** $b ::= 0 \mid 1 \mid a_1 == a_2 \mid a_1 \ < a_2 \mid !b \mid b_1 \ \&\& \ b2 \mid b_1 \ || \ b_2$

Regeln:

$$\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1 | 0 | \perp$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1}{\langle !b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 0} \qquad \frac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 0}{\langle !b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1} \qquad \frac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} \perp}{\langle !b, \sigma \rangle \to_{Bexp} \perp}$$

$$\frac{\langle b_1, \sigma \rangle \to_{Bexp} t_1 \qquad \langle b_2, \sigma \rangle \to_{Bexp} t_2}{\langle b_1 \ \&\& \ b_2, \sigma \rangle \to_{Bexp} t}$$

wobei $t = 1$ wenn $t_1 = t_2 = 1$;
$t = 0$ wenn $t_1 = 0$ oder ($t_1 = 1$ und $t_2 = 0$);
$t = \perp$ sonst

Operationale Semantik: Boolesche Ausdrücke

- **Bexp** $b ::= 0 \mid 1 \mid a_1 == a_2 \mid a_1 \ < a_2 \mid !b \mid b_1 \ \&\& \ b2 \mid b_1 \ || \ b_2$

Regeln:

$$\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1 | 0 | \perp$$

$$\frac{\langle b_1, \sigma \rangle \to_{Bexp} t_1 \qquad \langle b_2, \sigma \rangle \to_{Bexp} t_2}{\langle b_1 \ || \ b_2, \sigma \rangle \to_{Bexp} t}$$

wobei $t = 0$ wenn $t_1 = t_2 = 0$;
$t = 1$ wenn $t_1 = 1$ oder ($t_1 = 0$ und $t_2 = 1$);
$t = \perp$ sonst

Operationale Semantik: Anweisungen

- **Stmt** $c ::= \mathbf{Idt} = \mathbf{Exp} \mid \textbf{if } (b) \ c_1 \ \textbf{else} \ c_2 \mid \textbf{while } (b) \ c \mid c_1; c_2 \mid \{\}$

Beispiel:

$$\langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma' | \perp$$

$$\langle x = 5, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'$$

wobei $\sigma'(x) = 5$ und $\sigma'(y) = \sigma(y)$ für alle $y \neq x$

Operationale Semantik: Anweisungen

- **Stmt** $c ::= \mathbf{Idt} = \mathbf{Exp} \mid \textbf{if } (b) \ c_1 \ \textbf{else} \ c_2 \mid \textbf{while } (b) \ c \mid c_1; c_2 \mid \{\}$

Regeln:

Definiere:

$$\sigma[m/x](y) := \begin{cases} m & \text{if } x = y \\ \sigma(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\langle x = 5, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma[5/x]$$

Es gilt:

$$\forall \sigma, n, m, \forall x, y \ . \ x \neq y \Rightarrow \sigma[n/x][m/y] = \sigma[m/y][n/x]$$
$$\forall \sigma, n, m, \forall x \ . \ \sigma[n/x][m/x] = \sigma[m/x]$$

Operationale Semantik: Anweisungen

- **Stmt** $c ::=$ **Idt** $=$ **Exp** | **if** (b) c_1 **else** c_2 | **while** (b) c | $c_1; c_2$ | $\{\}$

Regeln:

$$\langle \{\}, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma$$

$$\frac{\langle a, \sigma \rangle \to_{Aexp} n \in \mathbf{Z}}{\langle x = a, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma[n/x]} \qquad \frac{\langle a, \sigma \rangle \to_{Aexp} \bot}{\langle x = a, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}$$

$$\frac{\langle c_1, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma' \neq \bot \qquad \langle c_2, \sigma' \rangle \to_{Stmt} \sigma'' \neq \bot}{\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma''}$$

$$\frac{\langle c_1, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}{\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}$$

$$\frac{\langle c_1, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma' \neq \bot \qquad \langle \{c_2\}, \sigma' \rangle \to_{Stmt} \bot}{\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}$$

Operationale Semantik: Anweisungen

- **Stmt** $c ::=$ **Idt** $=$ **Exp** | **if** (b) c_1 **else** c_2 | **while** (b) c | $c_1; c_2$ | $\{\}$

Regeln:

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1 \qquad \langle c_1, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\langle \textbf{if } (b) \ c_1 \ \textbf{else} \ c_2, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 0 \qquad \langle c_2, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\langle \textbf{if } (b) \ c_1 \ \textbf{else} \ c_2, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} \bot}{\langle \textbf{if } (b) \ c_1 \ \textbf{else} \ c_2, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}$$

Operationale Semantik: Anweisungen

- **Stmt** $c ::=$ **Idt** $=$ **Exp** | **if** (b) c_1 **else** c_2 | **while** (b) c | $c_1; c_2$ | $\{\}$

Regeln:

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 0}{\langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1 \qquad \langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma' \qquad \langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma' \rangle \to_{Stmt} \sigma''}{\langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma''}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1 \qquad \langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}{\langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot} \qquad \frac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} \bot}{\langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}$$

Beispiel

```
x = 1;
while (y != 0) {
 y = y - 1;
 x = 2 * x;
}
// x = 2^y
```

$\sigma(y) = 3$

Äquivalenz arithmetischer Ausdrücke

Gegeben zwei Aexp a_1 and a_2

- Sind sie gleich?

$$a_1 \sim_{Aexp} a_2 \text{ gdw } \forall \sigma, n. \langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n \Leftrightarrow \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n$$

`(x*x) + 2*x*y + (y*y)` und `(x+y) * (x+y)`

- Wann sind sie gleich?

$$\exists \sigma, n. \langle a_1, \sigma \rangle \to_{Aexp} n \Leftrightarrow \langle a_2, \sigma \rangle \to_{Aexp} n$$

`x*x` und `9*x+22`
`x*x` und `x*x+1`

Äquivalenz Boolscher Ausdrücke

Gegeben zwei Bexp-Ausdrücke b_1 and b_2

- Sind sie gleich?

$$b_1 \sim_{Bexp} b_2 \text{ iff } \forall \sigma, b. \langle b_1, \sigma \rangle \to_{Bexp} b \Leftrightarrow \langle b_2, \sigma \rangle \to_{Bexp} b$$

`A || (A && B)` und `A`

Beweisen

Zwei Programme c_0, c_1 sind äquivalent gdw. sie die gleichen Zustandsveränderungen bewirken. Formal definieren wir

Definition

$$c_0 \sim c_1 \text{ iff } \forall \sigma, \sigma'. \langle c_0, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma' \Leftrightarrow \langle c_1, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'$$

Ein einfaches Beispiel:

Lemma

Sei $w \equiv$ ***while*** (b) c *mit* $b \in$ ***Bexp***, $c \in$ ***Stmt***.
Dann gilt: $w \sim$ ***if*** (b) $\{c; w\}$ ***else*** $\{\}$

Beweis an der Tafel

Beweis

Gegeben beliebiger Programmzustand σ. Zu zeigen ist, dass sowohl w also auch **if** (b) $\{c; w\}$ **else** $\{\}$ zu dem selben Programmzustand auswerten oder beide zu einem Fehler. Der Beweis geht per Fallunterscheidung über die Auswertung von Teilausdrücken bzw. Teilprogrammen.

1. $\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 0$:

$$\langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma$$
$$\langle \textbf{if } (b) \ \{c; w\} \ \textbf{else} \ \{\}, \sigma \rangle \to_{Stmt} \langle \{\}, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma$$

2. $\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1$:
   1. $\langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'$

$$\overbrace{\langle \textbf{while } (b) \ c, \sigma \rangle}^{w} \to_{Stmt} \langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'$$
$$\langle w, \sigma' \rangle \to_{Stmt} \sigma''$$
$$\langle \textbf{if } (b) \ \{c; w\} \ \textbf{else} \ \{\}, \sigma \rangle \to_{Stmt} \langle \{c; w\}, \sigma \rangle \to_{Stmt} \langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'$$
$$\langle w, \sigma' \rangle \to_{Stmt} \sigma''$$

Beweis II

2. $\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} 1$:

   2.2. $\langle c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \bot$

$$\langle \overbrace{\textbf{while } (b)\ c}^{w}, \sigma\rangle \to_{Stmt} \langle c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \bot$$
$$\langle \textbf{if } (b)\ \{c; w\}\ \textbf{else}\ \{\}, \sigma\rangle \to_{Stmt} \langle \{c; w\}, \sigma\rangle \to_{Stmt} \langle c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \bot$$

3. $\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} \bot$:

$$\langle \textbf{while } (b)\ c, \sigma\rangle \to_{Stmt} \bot$$
$$\langle \textbf{if } (b)\ \{c; w\}\ \textbf{else}\ \{\}, \sigma\rangle \to_{Stmt} \bot$$

Zusammenfassung

- Operationale Semantik als ein Mittel zur Beschreibung der Semantik
- Auswertungsregeln arbeiten entlang der syntaktischen Struktur
- Werten Ausdrücke zu Werten aus und Programme zu Zuständen (zu gegebenen Zustand)
- Fragen zu Programmen: Gleichheit

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 3 vom 17.04.18: Denotationale Semantik

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Fahrplan

- Einführung
- Operationale Semantik
- Denotationale Semantik
- Äquivalenz der Operationalen und Denotationalen Semantik
- Die Floyd-Hoare-Logik
- Invarianten und die Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls
- Strukturierte Datentypen
- Modellierung und Spezifikation
- Verifikationsbedingungen
- Vorwärts mit Floyd und Hoare
- Funktionen und Prozeduren
- Referenzen
- Ausblick und Rückblick

Überblick

- Kleinster Fixpunkt
- Denotationale Semantik für C0

Fixpunkt

- Sei $f : A \to A$ eine Funktion. Ein **Fixpunkt** von f ist ein $a \in A$, so dass $f(a) = a$.
- Beispiele
  - Fixpunkte von $f(x) = \sqrt{x}$ sind 0 und 1; ebenfalls für $f(x) = x^2$.
  - Für die Sortierfunktion sind alle sortierten Listen Fixpunkte

Regeln und Regelinstanzen

Definition

Sei R eine Menge von Regeln $\frac{x_1 \ldots x_n}{y}$, $n \geq 0$.
Die Anwendung einer Regel auf spezifische $a_1 \ldots a_n$ ist eine Regelinstanz

- Betrachte folgende Regelmenge R

$$\frac{-}{2^2} \qquad \frac{-}{2^3} \qquad \frac{n \quad m}{n \cdot m}$$

- Regelinstanzen sind

$$\frac{-}{4} \qquad \frac{-}{8} \qquad \frac{4 \quad 8}{32} \qquad \frac{4 \quad 4}{16}$$

$$\frac{16 \quad 32}{512} \qquad \frac{3 \quad 5}{15} \qquad \ldots$$

Induktive Definierte Mengen

Definition

Seit R eine Menge von Regelinstanzen und B eine Menge. Dann definieren wir

$$\hat{R}(B) = \{y \mid \exists x_1, \ldots, x_k \subseteq B.\ \frac{x_1, \ldots, x_k}{y} \in R\} \text{ und}$$

$$\hat{R}^0(B) = B \text{ und } \hat{R}^{i+1}(B) = \hat{R}(\hat{R}^i(B))$$

Beispiel

- Betrachte folgende Regelmenge R

$$\frac{-}{2^2} \qquad \frac{-}{2^3} \qquad \frac{n \quad m}{n \cdot m}$$

- Was sind

$$\hat{R}^0(\emptyset) = \emptyset$$
$$\hat{R}^1(\emptyset) = \hat{R}(\emptyset) = \{4, 8\}$$
$$\hat{R}^2(\emptyset) = ?\{16, 32, 64, 4, 8\}$$
$$\hat{R}^3(\emptyset) = ?\{128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 16, 32, 64, 4, 8\}$$
$$\hat{R}^{i+1}(\emptyset) = ?\{2^{2k+3l} | 1 \leq k + l \leq 2^i\}$$

Induktive Definierte Mengen

Definition

Seit R eine Menge von Regelinstanzen und B eine Menge. Dann definieren wir

$$\hat{R}(B) = \{y \mid \exists x_1, \ldots, x_k \subseteq B.\ \frac{x_1, \ldots, x_k}{y} \in R\} \text{ und}$$

$$\hat{R}^0(B) = B \text{ und } \hat{R}^{i+1}(B) = \hat{R}(\hat{R}^i(B))$$

Definition (Abgeschlossen und Monoton)

- Eine Menge S is **abgeschlossen unter** R **(R-abgeschlossen)** gdw. $\hat{R}(S) \subseteq S$
- Eine Operation f **ist monoton** gdw.

$$\forall A, B. A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

Kleinster Fixpunkt Operator

Lemma

Für jede Menge von Regelinstanzen R ist die induzierte Operation $\hat{R}$ monoton.

Lemma

Sei $A_i = \hat{R}^i(\emptyset)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Dann gilt

(a) *A ist R-abgeschlossen,*

(b) *$\hat{R}(A) = A$, und*

(c) *A ist die kleinste R-abgeschlossene Menge.*

Beweis von Lemma (a).

A ist R-abgeschlossen:

Sei $\frac{x_1,\ldots,x_k}{y} \in R$ und $x_1, \ldots, x_k \subseteq A$.
Da $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ gibt es ein j so dass $x_1, \ldots, x_k \subseteq A_j$.
Also auch:

$$\begin{aligned} y \in \hat{R}(A_j) &= \hat{R}(\hat{R}^j(\emptyset)) \\ &= \hat{R}^{j+1}(\emptyset) \\ &= A_{j+1} \subseteq A. \end{aligned}$$

□

Beweis von Lemma (b): $\hat{R}(A) = A$.

- $\hat{R}(A) \subseteq A$:
  Da A R-abgeschlossen gilt auch $\hat{R}(A) \subseteq A$.
- $A \subseteq \hat{R}(A)$:
  Sei $y \in A$. Dann $\exists n > 0.\ y \in A_n$ und $y \notin A_{n-1}$.
  Folglich muss es eine Regelinstanz $\frac{x_1,\ldots,x_k}{y} \in R$ geben mit $x_1, \ldots, x_k \subseteq A_{n-1} \subseteq A$.
  Da $\hat{R}$ monoton gilt $\hat{R}(A_{n-1}) \subseteq \hat{R}(A)$.
  Da $y \in A_n = \hat{R}(A_{n-1})$ folgt daraus $y \in \hat{R}(A)$.

□

Beweis von Lemma (c).

A ist die kleinste R-abgeschlossene Menge, d.h. für jede R-abgeschlossene Menge B gilt $A \subseteq B$.

Beweis per Induktion über n dass gilt $A_n \subseteq B$:

- Basisfall:
  $A_0 = \emptyset \subseteq B$
- Induktionsschritt:
  Da B R-abgeschlossen ist gilt: $\hat{R}(B) \subseteq B$.
  Induktionsannahme: $A_n \subseteq B$.
  Dann gilt $A_{n+1} = \hat{R}(A_n) \subseteq \hat{R}(B) \subseteq B$ weil $\hat{R}$ monoton und B ist R-abgeschlossen.

□

Kleinster Fixpunkt Operator

Definition

$$fix(\hat{R}) = \bigcup_{n\in N} \hat{R}^n(\emptyset)$$

ist der **kleinste Fixpunkt**.

Kleinster Fixpunkt

- Betrachte folgende Regelmenge R

$$\frac{-}{2^2} \qquad \frac{-}{2^3} \qquad \frac{n \quad m}{n \cdot m}$$

- Was sind

$$\begin{aligned} \hat{R}^1(\emptyset) &= \hat{R}(\emptyset) = \{4, 8\} \\ \hat{R}^2(\emptyset) &= ? \\ \hat{R}^3(\emptyset) &= ? \\ \hat{R}^{i+1}(\emptyset) &= ? \end{aligned}$$

- Wie sieht $fix(\hat{R})$ aus?

Denotationale Semantik - Motivation

- **Operationale Semantik**
  Eine Menge von Regeln, die einen Zustand und ein Programm in einen neuen Zustand oder Fehler überführen

$$\langle c, \sigma\rangle \rightarrow_{Stmt} \sigma' | \perp$$

- **Denotationale Semantik**
  Eine Menge von Regeln, die ein Programm in eine **partielle Funktion** (Denotat) von Zustand nach Zustand überführen

$$\mathcal{C}[\![c]\!] : \Sigma \rightharpoonup \Sigma$$

Denotationale Semantik - Motivation

Zwei Programme sind äquivalent gdw. sie immer zum selben Zustand (oder Fehler) auswerten

$$c_0 \sim c_1 \text{ iff } (\forall \sigma, \sigma'. \langle c_0, \sigma\rangle \rightarrow_{Stmt} \sigma' \Leftrightarrow \langle c_1, \sigma\rangle \rightarrow_{Stmt} \sigma')$$

oder
Zwei Programme sind äquivalent gdw. sie die selbe partielle Funktion **denotieren**

$$c_0 \sim c_1 \text{ iff } \{(\sigma, \sigma') | \langle c_0, \sigma\rangle \rightarrow_{Stmt} \sigma'\} = \{(\sigma, \sigma') | \langle c_1, \sigma\rangle \rightarrow_{Stmt} \sigma'\}$$

Denotierte Funktionen

- jeder a :**Aexp** denotiert eine partielle Funktion $\Sigma \rightharpoonup \mathbf{Z}$
- jeder b :**Bexp** denotiert eine partielle Funktion $\Sigma \rightharpoonup \mathbf{T}$
- jedes c :**Stmt** denotiert eine partielle Funktion $\Sigma \rightharpoonup \Sigma$

Denotat von Aexp

$$\mathcal{A}[\![a]\!] : \mathbf{Aexp} \to (\Sigma \rightharpoonup \mathbf{Z})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![n]\!] &= \{(\sigma, n) \mid \sigma \in \Sigma\} \\
\mathcal{A}[\![x]\!] &= \{(\sigma, \sigma(x)) \mid \sigma \in \Sigma, x \in \mathit{Dom}(\sigma)\} \\
\mathcal{A}[\![a_0 + a_1]\!] &= \{(\sigma, n_0 + n_1) \mid (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!] \wedge (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!]\} \\
\mathcal{A}[\![a_0 - a_1]\!] &= \{(\sigma, n_0 - n_1) \mid (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!] \wedge (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!]\} \\
\mathcal{A}[\![a_0 * a_1]\!] &= \{(\sigma, n_0 * n_1) \mid (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!] \wedge (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!]\} \\
\mathcal{A}[\![a_0 / a_1]\!] &= \{(\sigma, n_0 / n_1) \mid (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!] \wedge (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!] \wedge n_1 \neq 0\}
\end{aligned}$$

Denotat von Bexp

$$\mathcal{B}[\![a]\!] : \mathbf{Bexp} \to (\Sigma \rightharpoonup \mathbf{T})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}[\![1]\!] &= \{(\sigma, 1) \mid \sigma \in \Sigma\} \\
\mathcal{B}[\![0]\!] &= \{(\sigma, 0) \mid \sigma \in \Sigma\} \\
\mathcal{B}[\![a_0 == a_1]\!] &= \{(\sigma, 1) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!](\sigma), \\
&\qquad (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!], n_0 = n_1\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, 0) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!](\sigma), \\
&\qquad (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!], n_0 \neq n_1\} \\
\mathcal{B}[\![a_0 < a_1]\!] &= \{(\sigma, 1) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!](\sigma), \\
&\qquad (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!], n_0 < n_1\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, 0) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!](\sigma), \\
&\qquad (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!], n_0 \geq n_1\}
\end{aligned}$$

Denotat von Bexp

$$\mathcal{B}[\![a]\!] : \mathbf{Bexp} \to (\Sigma \rightharpoonup \mathbf{T})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}[\![!b]\!] &= \{(\sigma, 1) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!]\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, 0) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!]\} \\
\mathcal{B}[\![b_1 \;\&\&\; b2]\!] &= \{(\sigma, 0) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b_1]\!]\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, t_2) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b_1]\!], (\sigma, t_2) \in \mathcal{B}[\![b_2]\!]\} \\
\mathcal{B}[\![b_1 \;||\; b_2]\!] &= \{(\sigma, 1) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b_1]\!]\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, t_2) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b_1]\!], (\sigma, t_2) \in \mathcal{B}[\![b_2]\!]\}
\end{aligned}$$

Denotat von Stmt

$$\mathcal{C}[\![.]\!] : \mathbf{Stmt} \to (\Sigma \rightharpoonup \Sigma)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}[\![x = a]\!] &= \{(\sigma, \sigma[n/x]) \mid \sigma \in \Sigma \wedge (\sigma, n) \in \mathcal{A}[\![a]\!]\} \\
\mathcal{C}[\![c_1; c_2]\!] &= \mathcal{C}[\![c_2]\!] \circ \mathcal{C}[\![c_1]\!] \quad \text{Komposition von Relationen} \\
\mathcal{C}[\![\{\,\}]\!] &= \mathbf{Id} \qquad \mathbf{Id} := \{(\sigma, \sigma) | \sigma \in \Sigma\} \\
\mathcal{C}[\![\textbf{if } (b) \; c_0 \textbf{ else } c_1]\!] &= \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c_0]\!]\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c_1]\!]\}
\end{aligned}$$

Aber was ist

$$\mathcal{C}[\![\textbf{while } (b) \; c]\!] = ??$$

Denotationale Semantik für while

Sei $w \equiv$ **while** (b) c (und $\sigma \in \Sigma$). Wir wissen bereits, dass gilt

$$w \sim \textbf{if } (b) \; \{c; w\} \textbf{ else } \{\,\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}[\![w]\!] &= \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![\{c; w\}]\!]\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!]\} \\
&= \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![w]\!] \circ \mathcal{C}[\![c]\!]\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!]\} \\
&= \{(\sigma, \sigma') \mid \exists \sigma''.\ (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma'') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \wedge (\sigma'', \sigma') \in \mathcal{C}[\![w]\!]\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!]\}
\end{aligned}$$

Denotationale Semantik von while

Sei $w \equiv$ **while** (b) c (und $\sigma \in \Sigma$). Wir wissen bereits, dass gilt

$$w \sim \textbf{if } (b) \; \{c; w\} \textbf{ else } \{\,\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}[\![w]\!]_0 &= \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!](\sigma)\} \\
\mathcal{C}[\![w]\!]_1 &= \{(\sigma, \sigma') \mid \exists \sigma''.\ (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma'') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \\
&\qquad \wedge (\sigma'', \sigma') \in \mathcal{C}[\![w]\!]_0\} \\
\mathcal{C}[\![w]\!]_2 &= \{(\sigma, \sigma') \mid \exists \sigma''.\ (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma'') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \\
&\qquad \wedge (\sigma'', \sigma') \in \mathcal{C}[\![w]\!]_1\} \\
&\vdots \\
\mathcal{C}[\![w]\!]_{i+1} &= \{(\sigma, \sigma') \mid \exists \sigma''.\ (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma'') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \\
&\qquad \wedge (\sigma'', \sigma') \in \mathcal{C}[\![w]\!]_i\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\varphi) &= \{(\sigma, \sigma') \mid \exists \sigma''.\ \mathcal{B}[\![b]\!](\sigma) = 1 \wedge (\sigma, \sigma'') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \wedge (\sigma'', \sigma') \in \varphi\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, \sigma) \mid \mathcal{B}[\![b]\!](\sigma) = 0\}
\end{aligned}$$

Denotationale Semantik von while

Sei $w \equiv$ **while** (b) c (und $\sigma \in \Sigma$). Wir wissen bereits, dass gilt

$$w \sim \textbf{if } (b) \; \{c; w\} \textbf{ else } \{\,\}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\psi) &= \{(\sigma, \sigma') \mid \exists \sigma''.\ (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma'') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \wedge (\sigma'', \sigma') \in \psi\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!]\}
\end{aligned}$$

Γ ist wie $\hat{R}$, wobei R definiert ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
R &= \left\{ \frac{(\sigma'', \sigma')}{(\sigma, \sigma')} \mid (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma'') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \right\} \\
&\quad \cup \left\{ \frac{}{(\sigma, \sigma)} \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \right\}
\end{aligned}$$

und die Semantik von w ist der Fixpunkt von Γ, d.h. $\mathcal{C}[\![w]\!] = \mathit{fix}(\Gamma)$

Denotation für Stmt

$$\mathcal{C}[\![.]\!] : \textbf{Stmt} \to (\Sigma \rightharpoonup \Sigma)$$

$$\begin{array}{rcll}
\mathcal{C}[\![x = a]\!] & = & \{(\sigma, \sigma[n/X]) \mid \sigma \in \Sigma \wedge (\sigma, n) \in \mathcal{A}[\![a]\!]\} & \\
\mathcal{C}[\![c_1; c_2]\!] & = & \mathcal{C}[\![c_2]\!] \circ \mathcal{C}[\![c_1]\!] & \text{Komposition von Relationen} \\
\mathcal{C}[\![\{\,\}]\!] & = & \textbf{Id} & \textbf{Id} := \{(\sigma, \sigma) | \sigma \in \Sigma\} \\
\mathcal{C}[\![\textbf{if } (b) \ c_0 \ \textbf{else } \ c_1]\!] & = & \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c_0]\!]\} & \\
 & & \cup \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c_1]\!]\} & \\
\mathcal{C}[\![\textbf{while } (b) \ c]\!] & = & \mathit{fix}(\Gamma) &
\end{array}$$

mit

$$\begin{array}{rcl}
\Gamma(\psi) & = & \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma') \in \psi \circ \mathcal{C}[\![c]\!]\} \\
 & & \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!]\}
\end{array}$$

Weitere Intuition zur Fixpunkt Konstruktion

- Sei $w \equiv \textbf{while } (b) \ c$
- Zur Erinnerung: Wir haben begonnen mit $w \sim \textbf{if } (b) \ \{c; w\} \ \textbf{else } \{\,\}$
- Dann müsste auch gelten

$$\mathcal{C}[\![w]\!] \stackrel{!}{=} \mathcal{C}[\![\textbf{if } (b) \ \{c; w\} \ \textbf{else } \{\,\}]\!]$$

- Beweis an der Tafel

Beweis $\mathcal{C}[\![w]\!] \stackrel{!}{=} \mathcal{C}[\![\textbf{if } (b) \ \{c; w\} \ \textbf{else } \{\,\}]\!]$

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{C}[\![w]\!] & = & \mathit{fix}(\Gamma) \\
 & = & \Gamma(\mathit{fix}(\Gamma)) \\
 & = & \Gamma(\mathcal{C}[\![w]\!]) \\
 & = & \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![w]\!] \circ \mathcal{C}[\![c]\!]\} \\
 & & \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!]\} \\
 & = & \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c; \ w]\!]\} \\
 & & \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!]\} \\
 & = & \mathcal{C}[\![\textbf{if } (b) \ \{c; w\} \ \textbf{else } \{\,\}]\!]
\end{array}$$

Fahrplan

- Einführung
- Operationale Semantik
- Denotationale Semantik
- Äquivalenz der Operationalen und Denotationalen Semantik
- Die Floyd-Hoare-Logik
- Invarianten und die Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls
- Strukturierte Datentypen
- Modellierung und Spezifikation
- Verifikationsbedingungen
- Vorwärts mit Floyd und Hoare
- Funktionen und Prozeduren
- Referenzen
- Ausblick und Rückblick

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 4 vom 24.04.18: Äquivalenz der Operationalen und Denotationalen Semantik

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Fahrplan

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} n$	Denotational $\mathcal{A}[\![a]\!]$
m∈ **Z**	$\langle m, \sigma\rangle \to_{Aexp} m$	$\{(\sigma, m) \mid \sigma \in \Sigma\}$
x∈ **Loc**	$\dfrac{x \in Dom(\sigma)}{\langle x, \sigma\rangle \to_{Aexp} \sigma(x)}$	$\{(\sigma, \sigma(x)) \mid \sigma \in \Sigma, x \in Dom(\sigma)\}$
$a_1 \circ a_2$	$\dfrac{\langle a_1, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \quad \langle a_2, \sigma\rangle \to_{Aexp} m \quad n, m \neq \bot}{\langle a_1 \circ a_2, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \circ^I m}$	$\{(\sigma, n \circ^I m) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!], (\sigma, m) \in \mathcal{A}[\![a_2]\!]\}$
	$\dfrac{\langle a_1, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \quad \langle a_2, \sigma\rangle \to_{Aexp} m \quad n = \bot \text{ oder } m = \bot}{\langle a_1 \circ a_2, \sigma\rangle \to_{Aexp} \bot}$ $\circ \in \{+, *, -\}$	

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} n$	Denotational $\mathcal{A}[\![a]\!]$
a_1/a_2	$\dfrac{\langle a_1, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \quad \langle a_2, \sigma\rangle \to_{Aexp} m \quad m \neq 0 \qquad m, n \neq \bot}{\langle a_1 \circ a_2, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \circ^I m}$	$\{(\sigma, n/m) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!], (\sigma, m) \in \mathcal{A}[\![a_2]\!], m \neq 0\}$
	$\dfrac{\langle a_1, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \quad \langle a_2, \sigma\rangle \to_{Aexp} m \quad n = \bot, m = \bot \text{ oder } m = 0}{\langle a_1/a_2, \sigma\rangle \to_{Aexp} \bot}$	

Äquivalenz operationale und denotationale Semantik

- Für alle $a \in$ **Aexp**, für alle $n \in$ **Z**, für alle Zustände σ:

$$\langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \Leftrightarrow (\sigma, n) \in \mathcal{A}[\![a]\!]$$
$$\langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} \bot \Leftrightarrow \sigma \notin Dom(\mathcal{A}[\![a]\!])$$

- Beweis Prinzip?per struktureller Induktion über a. (Warum?)

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} 0\vert 1$	Denotational $\mathcal{B}[\![b]\!]$
1	$\langle 1, \sigma\rangle \to_{Bexp} 1$	$\{(\sigma, 1) \mid \sigma \in \Sigma\}$
0	$\langle 0, \sigma\rangle \to_{Bexp} 0$	$\{(\sigma, 0) \mid \sigma \in \Sigma\}$

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operat. $\langle b, \sigma\rangle \to_{Bexp} 0\vert 1$	Denotational $\mathcal{B}[\![b]\!]$
$a_0 == a_1$	$\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \quad \langle a_1, \sigma\rangle \to_{Aexp} m \quad n, m \neq \bot \qquad n = m}{\langle a_0 == a_1, \sigma\rangle \to_{Bexp} 1}$ $\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \quad \langle a_1, \sigma\rangle \to_{Aexp} m \quad n, m \neq \bot \qquad n \neq m}{\langle a_0 == a_1, \sigma\rangle \to_{Bexp} 0}$ $\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \to_{Aexp} n \quad \langle a_1, \sigma\rangle \to_{Aexp} m \quad n = \bot \text{ oder } m = \bot}{\langle a_0 == a_1, \sigma\rangle \to_{Bexp} \bot}$	$\{(\sigma, 1) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!], (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!], n_0 = n_1\}$ $\cup$ $\{(\sigma, 0) \mid \sigma \in \Sigma, (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!], (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!], n_0 \neq n_1\}$
$a1 <= a2$	analog	

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle a, \sigma\rangle \to_{Bexp} b$	Denotational $\mathcal{B}[\![b]\!]$
$b_1 \&\& b_0$	$\dfrac{\langle b_1, \sigma\rangle \to_{Bexp} 0}{\langle b_1 \&\& b_2, \sigma\rangle \to 0}$ $\dfrac{\langle b_1, \sigma\rangle \to_{Bexp} 1 \quad \langle b_2, \sigma\rangle \to_{Bexp} b}{\langle b_1 \&\& b_2, \sigma\rangle \to b}$	$\{(\sigma, 0) \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b_1]\!]\}$
	$\dfrac{\langle b_1, \sigma\rangle \to_{Bexp} \bot}{\langle b_1 \&\& b_2, \sigma\rangle \to \bot}$	$\{(\sigma, b) \mid (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b_1]\!], (\sigma, b) \in \mathcal{B}[\![b_2]\!]\}$
$b_1 \vert\vert b_2$	analog	
$!n$	...	

Äquivalenz operationale und denotationale Semantik

- Für alle $b \in \mathbf{Bexp}$, für alle $t \in \mathbf{B}$, for alle Zustände σ:

$$\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} t \Leftrightarrow (\sigma, t) \in \mathcal{B}[\![b]\!]$$
$$\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} \bot \Leftrightarrow \sigma \notin Dom(\mathcal{B}[\![b]\!])$$

- Beweis Prinzip?per struktureller Induktion über b (unter Verwendung der Äquivalenz für AExp). (Warum?)

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational	Denotational $\mathcal{C}[\![c]\!]$
$\{\}$	$\dfrac{\langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma' \mid \bot}{\langle \{\}, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma}$	$\mathcal{C}[\![\{\}]\!] = Id$
$c_1; c_2$	$\dfrac{\langle c_1, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma' \neq \bot \quad \langle c_2, \sigma' \rangle \to_{Stmt} \sigma''}{\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma''}$ $\dfrac{\langle c_1, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}{\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}$	$\mathcal{C}[\![c_2]\!] \circ \mathcal{C}[\![c_1]\!]$
$x = a$	$\dfrac{\langle a, \sigma \rangle \to_{Aexp} n}{\langle x = a, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma[n/x]}$ $\dfrac{\langle a, \sigma \rangle \to_{Aexp} \bot}{\langle x = a, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}$	$\{(\sigma, \sigma[n/x]) \mid (\sigma, n) \in \mathcal{A}[\![a]\!]\}$

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma' \mid \bot$	Denotational $\mathcal{C}[\![c]\!]$
if (b) c_0	$\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1 \quad \langle c_0, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'}$ $\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} \bot}{\langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}$	$\{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!], (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c_0]\!]\}$
else c_1	$\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 0 \quad \langle c_1, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'}{\langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma'}$	$\{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!], (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c_1]\!]\}$

Operationale vs. denotationale Semantik

	Operational $\langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma' \mid \bot$	Denotational $\mathcal{C}[\![c]\!]$
$\underbrace{\textbf{while } (b) \ c}_{w}$	$\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 0}{\langle w, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma} \quad \dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} \bot}{\langle w, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}$ $\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1 \quad \langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma' \neq \bot \quad \langle w, \sigma' \rangle \to_{Stmt} \sigma''}{\langle w, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma''}$ $\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \to_{Bexp} 1 \quad \langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}{\langle w, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot}$	$fix(\Gamma)$

mit

$$\Gamma(\varphi) = \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, 1) \in \mathcal{B}[\![b]\!], (\sigma, \sigma') \in \varphi \circ \mathcal{C}[\![c]\!]\} \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, 0) \in \mathcal{B}[\![b]\!]\}$$

Äquivalenz operationale und denotationale Semantik

- Für alle $c \in \mathbf{Stmt}$, für alle Zustände σ, σ':

$$\langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \sigma' \Leftrightarrow (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c]\!]$$
$$\langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot \Rightarrow \sigma \notin Dom(\mathcal{C}[\![c]\!])$$

- $\Rightarrow$ Beweis Prinzip?per Induktion über die Ableitung in der operationalen Semantik (Warum?)
- $\Leftarrow$ Beweis Prinzip?per struktureller Induktion über c (Verwendung der Äquivalenz für arithmetische und boolsche Ausdrücke). Für die While-Schleife Rückgriff auf Definition des Fixpunkts und Induktion über die Teilmengen $\Gamma^i(\emptyset)$ des Fixpunkts. (Warum?)
  - Gegenbeispiel für $\Leftarrow$ in der zweiten Aussage: wähle $c \equiv while(1)\{\}$: $\mathcal{C}[\![c]\!] = \emptyset$ aber $\langle c, \sigma \rangle \to_{Stmt} \bot$ gilt nicht (sondern?).

Fahrplan

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 5 vom 03.05.18: Die Floyd-Hoare-Logik

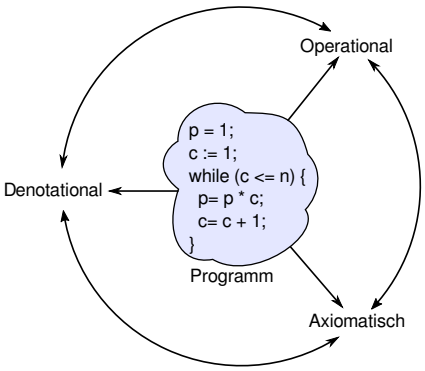
Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Fahrplan

Drei Semantiken — Eine Sicht



Floyd-Hoare-Logik: Idee

- Was wird hier berechnet? $p = n!$
- Warum? Wie können wir das **beweisen**?
- Wir berechnen symbolisch, welche Werte Variablen über den Programmverlauf annehmen.

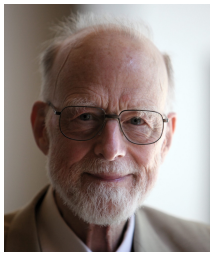
```
p= 1;
c= 1;
while (c <= n) {
  p = p * c;
  c = c + 1;
}
```

- Operationale/denotionale Semantik nicht für **Korrektheitsbeweise** geeignet: Ausdrücke werden zu groß, skaliert nicht.
- **Abstraktion** nötig.
- Grundidee: **Zusicherungen** über den Zustand an bestimmten Punkten im Programmablauf.

Bob Floyd und Tony Hoare

Bildquelle: Stanford University

Robert Floyd
1936 – 2001



Bildquelle: Wikipedia

Sir Anthony Charles Richard Hoare
* 1934

Grundbausteine der Floyd-Hoare-Logik

- **Zusicherungen** über den Zustand
- Beispiele:
  - (B): Hier gilt $p = c = 1$
  - (D): Hier ist c ist um eines größer als der Wert von c an Punkt (C)
- Gesamtaussage: Wenn am Punkt(A) der Wert von $n \geq 0$, dann ist am Punkt (E) $p = n!$.

```
// (A)
p= 1;
c= 1;
// (B)
while (c <= n) {
  p= p * c;
  // (C)
  c= c + 1;
  // (D)
}
// (E)
```


Grundbausteine der Floyd-Hoare-Logik

- **Logische Variablen** (zustandsfrei) und **Programmvariablen**
- **Zusicherungen** mit logischen und Programmvariablen
- **Floyd-Hoare-Tripel** $\{P\}\, c\, \{Q\}$
  - Vorbedingung P (Zusicherung)
  - Programm c
  - Nachbedingung Q (Zusicherung)
- Floyd-Hoare-Logik abstrahiert Programme durch logische Formeln.

Zusicherungen (Assertions)

- Erweiterung von **Aexp** and **Bexp** durch
  - **Logische** Variablen **Var** $v := N, M, L, U, V, X, Y, Z$
  - Definierte Funktionen und Prädikate über **Aexp** $n!, \sum_{i=1}^{n} i, \ldots$
  - Implikation und Quantoren $b_1 \Rightarrow b_2$, **forall** $v.\, b$, **exists** $v.\, b$
- Formal:

$$\begin{aligned} \textbf{Aexpv}\ a ::= {} & \mathbf{Z} \mid \mathbf{Idt} \mid \mathbf{Var} \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 \times a_2 \\ & \mid f(e_1, \ldots, e_n) \\ \textbf{Assn}\ b ::= {} & \mathbf{1} \mid \mathbf{0} \mid a_1 == a_2 \mid a_1 ! = a_2 \mid a_1 <= a_2 \\ & \mid ! b \mid b_1 \,\&\&\, b2 \mid b_1 \,||\, b_2 \\ & \mid b_1 \Rightarrow b_2 \mid p(e_1, \ldots, e_n) \mid \textbf{forall}\ v;\ b \mid \textbf{exists}\ v;\ b \end{aligned}$$

Erfüllung von Zusicherungen

- Wann gilt eine Zusicherung $b \in \mathbf{Assn}$ in einem Zustand σ?
  - Auswertung (denotationale Semantik) ergibt *true*
  - **Aber:** was ist mit den logischen Variablen?
- **Belegung** der logischen Variablen: $I : \mathbf{Var} \to \mathbf{T}$
- Semantik von b unter der Belegung I: $\mathcal{B}_v[\![b]\!]^I, \mathcal{A}_v[\![a]\!]^I$

Erfülltheit von Zusicherungen

$b \in \mathbf{Assn}$ ist in Zustand σ mit Belegung I erfüllt ($\sigma \models^I b$), gdw

$$\mathcal{B}_v[\![b]\!]^I(\sigma) = \mathit{true}$$

Floyd-Hoare-Tripel

Partielle Korrektheit ($\models \{P\}\, c\, \{Q\}$)

c ist **partiell korrekt**, wenn für alle Zustände σ, die P erfüllen, gilt: **wenn** die Ausführung von c mit σ in σ' terminiert, **dann** erfüllt σ' Q.

$$\models \{P\}\, c\, \{Q\} \iff \forall I.\, \forall \sigma.\, \sigma \models^I P \land \exists \sigma'.\, (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \implies \sigma' \models^I Q$$

- Gleiche Belegung der logischen Variablen für P und Q.

Totale Korrektheit ($\models [P]\, c\, [Q]$)

c ist **total korrekt**, wenn für alle Zustande σ, die P erfüllen, die Ausführung von c mit σ in σ' terminiert, und σ' erfüllt Q.

$$\models [P]\, c\, [Q] \iff \forall I.\, \forall \sigma.\, \sigma \models^I P \implies \exists \sigma'.\, (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \land \sigma' \models^I Q$$

- Folgendes **gilt**: $\models \{\mathbf{1}\}\ \mathbf{while}(1)\{\ \}\ \{\mathbf{1}\}$
- Folgendes gilt **nicht**: $\models [\mathbf{1}]\ \mathbf{while}(1)\{\ \}\ [\mathbf{1}]$

Regeln der Floyd-Hoare-Logik

- Die Floyd-Hoare-Logik erlaubt es, Zusicherungen der Form $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$ syntaktisch **herzuleiten**.
- Der **Kalkül** der Logik besteht aus sechs Regeln der Form

$$\frac{\vdash \{P_1\}\, c_1\, \{Q_1\} \ldots \vdash \{P_n\}\, c_n\, \{Q_n\}}{\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}}$$

- Für jedes Konstrukt der Programmiersprache gibt es eine Regel.

Regeln des Floyd-Hoare-Kalküls: Zuweisung

$$\frac{}{\vdash \{P[e/x]\}\, x = e\, \{P\}}$$

- Eine Zuweisung x=e ändert den Zustand so dass an der Stelle x jetzt der Wert von e steht. Damit **nachher** das Prädikat P gilt, muss also **vorher** das Prädikat gelten, wenn wir x durch e ersetzen.
- Es ist völlig normal (aber dennoch falsch) zu denken, die Substitution gehöre eigentlich in die Nachbedingung.
- Beispiele:

$\{5 < 10 \iff (x < 10)[5/x]\}$
x = 5
$\{x < 10\}$

$\{x < 9 \iff x + 1 < 10\}$
x = x+ 1
$\{x < 10\}$

Regeln des Floyd-Hoare-Kalküls: Fallunterscheidung

$$\frac{\vdash \{A \,\&\&\, b\}\, c_0\, \{B\} \qquad \vdash \{A \,\&\&\, \neg b\}\, c_1\, \{B\}}{\vdash \{A\}\ \mathbf{if}\ (b)\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1\, \{B\}}$$

- In der Vorbedingung des **if**-Zweiges gilt die Bedingung b, und im **else**-Zweig gilt die Negation $\neg b$.
- Beide Zweige müssem mit derselben Nachbedingung enden.

Regeln des Floyd-Hoare-Kalküls: Iteration

$$\frac{\vdash \{A \land b\}\, c\, \{A\}}{\vdash \{A\}\ \mathbf{while}(b)\ c\, \{A \land \neg b\}}$$

- Iteration korrespondiert zu **Induktion**.
- Bei (natürlicher) Induktion zeigen wir, dass die **gleiche** Eigenschaft P für 0 gilt, und dass wenn sie für $P(n)$ gilt, daraus folgt, dass sie für $P(n+1)$ gilt.
- Analog dazu benötigen wir hier eine **Invariante** A, die sowohl **vor** als auch **nach** dem Schleifenrumpf gilt.
- In der Vorbedingung des Schleifenrumpfes können wir die Schleifenbedingung b annehmen.
- Die **Vorbedingung** der **Schleife** ist die Invariante A, und die **Nachbedingung** der **Schleife** ist A und die Negation der Schleifenbedingung b.

Regeln des Floyd-Hoare-Kalküls: Sequenzierung

$$\frac{\vdash \{A\}\, c_1\, \{B\} \qquad \vdash \{B\}\, c_2\, \{C\}}{\vdash \{A\}\, c_1; c_2\, \{C\}}$$

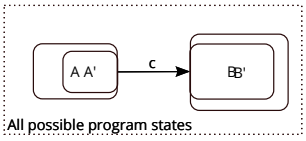
- Hier wird eine Zwischenzusicherung B benötigt.

$$\frac{}{\vdash \{A\}\, \{\}\, \{A\}}$$

- Trivial.

Regeln des Floyd-Hoare-Kalküls: Weakening

$$\frac{A' \implies A \qquad \vdash \{A\}\, c\, \{B\} \qquad B \implies B'}{\vdash \{A'\}\, c\, \{B'\}}$$



- $\models \{A\}\, c\, \{B\}$: Ausführung von c startet in Zustand, in dem A gilt, und endet (ggf) in Zustand, in dem B gilt.
- Zustandsprädikate beschreiben Mengen von Zuständen: $P \subseteq Q$ gdw. $P \implies Q$.
- Wir können A zu A' einschränken ($A' \subseteq A$ oder $A' \implies A$), oder B zu B' vergrößern ($B \subseteq B'$ oder $B \implies B'$), und erhalten $\models \{A'\}\, c\, \{B'\}$.

Überblick: die Regeln des Floyd-Hoare-Kalküls

$$\frac{}{\vdash \{P[e/x]\}\, x = e\, \{P\}}$$

$$\frac{\vdash \{A \wedge b\}\, c_0\, \{B\} \qquad \vdash \{A \wedge \neg b\}\, c_1\, \{B\}}{\vdash \{A\}\ \textbf{if}\ (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1\, \{B\}}$$

$$\frac{\vdash \{A \wedge b\}\, c\, \{A\}}{\vdash \{A\}\ \textbf{while}(b)\ c\, \{A \wedge \neg b\}}$$

$$\frac{}{\vdash \{A\}\, \{\}\, \{A\}} \qquad \frac{\vdash \{A\}\, c_1\, \{B\} \qquad \vdash \{B\}\, c_2\, \{C\}}{\vdash \{A\}\, c_1; c_2\, \{C\}}$$

$$\frac{A' \Longrightarrow A \qquad \vdash \{A\}\, c\, \{B\} \qquad B \Longrightarrow B'}{\vdash \{A'\}\, c\, \{B'\}}$$

Einfache Beispiele

Sei p:

```
z= x;
x= y;
y= z;
```

Zu zeigen:

- p vertauscht x und y
- $\vdash \{x = X \wedge y = Y\}$ p $\{x = Y \wedge y = X\}$

Sei q:

```
if (x < y) {
  z = x;
  } else {
  z= y;
  }
```

Zu zeigen:

- q berechnet in z das Minimum von x und y
- $\vdash \{true\}$ q $\{z \leq x \wedge z \leq y\}$

Wie wir Floyd-Hoare-Beweise aufschreiben

```
// {P}
// {P1}
x= e;
// {P2}
// {P3}
while (x< n) {
    // {P3 ∧ x < n}
    // {P4}
    z= a;
    // {P3}
    }
// {P3 ∧ ¬(x < n)}
// {Q}
```

- Beispiel zeigt: $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$
- Programm wird mit gültigen Zusicherungen annotiert.
- Vor einer Zeile steht die Vorbedingung, danach die Nachbedingung.
- Implizite Anwendung der Sequenzenregel.
- Weakening wird notiert durch mehrere Zusicherungen, und muss **bewiesen** werden.
  - Im Beispiel: $P \Longrightarrow P_1$, $P_2 \Longrightarrow P_3$, $P_3 \wedge x < n \Longrightarrow P_4$, $P_3 \wedge \neg(x < n) \Longrightarrow Q$.

Das einfache Beispiel in neuer Notation

```
// {x = X ∧ y = Y}
// {y = Y ∧ x = X}
z= x;
// {y = Y ∧ z = X}
x= y;
// {x = Y ∧ z = X}
y= z;
// {x = Y ∧ y = X}
```


Das Fakultätsbeispiel

```
// {1 = 0! ∧ ∧0 ≤ n}
// {1 = (1 − 1)! ∧ 1 ≤ 1 ∧ 1 − 1 ≤ n}
p= 1;
// {p = (1 − 1)! ∧ 1 ≤ 1 ∧ 1 − 1 ≤ n}
c= 1;
// {p = (c − 1)! ∧ 1 ≤ c ∧ c − 1 ≤ n}
while (c<= n) {
  // {p = (c − 1)! ∧ 1 ≤ c ∧ c − 1 ≤ n ∧ c ≤ n}
  // {p ∗ c = (c − 1)! ∗ c ∧ 1 ≤ c ∧ c ≤ n}
  // {p ∗ c = c! ∧ 1 ≤ c ∧ c ≤ n}
  // {p ∗ c = ((c + 1) − 1)! ∧ 1 ≤ c + 1 ∧ (c + 1) − 1 ≤ n}
  p= p∗c;
  // {p = ((c + 1) − 1)! ∧ 1 ≤ c + 1 ∧ (c + 1) − 1 ≤ n}
  c= c+1;
  // {p = (c − 1)! ∧ 1 ≤ c ∧ c − 1 ≤ n}
  }
// {p = (c − 1)! ∧ 1 ≤ c ∧ c − 1 ≤ n ∧ ¬(c ≤ n)}
// {p = (c − 1)! ∧ 1 ≤ c ∧ c − 1 ≤ n ∧ c > n}
// {p = (c − 1)! ∧ 1 ≤ c ∧ c − 1 = n}
// {p = n!}
```


Das Fakultätsbeispiel (Quellcode)

```
/** { 1 == factorial(0) && 0 <= n } */
/** { 1 == factorial(1- 1) && 1 <= 1 && 1-1 <= n } */
p= 1;
/** { p == factorial(1- 1) && 1 <= 1 && 1-1 <= n } */
c= 1;
/** { p == factorial(c- 1) && 1 <= c && c-1 <= n } */
while (c<= n) {
  /** { p == factorial(c-1) && 1<= c && c-1 <= n && c <= n } */
  /** { p*c == factorial(c-1)* c && 1 <= c && c <= n } */
  /** { p*c == factorial(c) && 1 <= c && c <= n } */
  /** { p*c == factorial((c+1)- 1) && 1 <= c+1 && (c+1)-1 <= n } */
  p= p*c;
  /** { p == factorial((c+1)-1) && 1<= c+1 && (c+1)-1 <= n } */
  c= c+1;
  /** { p == factorial(c-1) && 1 <= c && c-1 <= n } */
  }
/** { p == factorial(c-1) && 1<= c && c-1 <= n && factorial(c <= n) } *
/** { p == factorial(c-1) && 1<= c && c-1 <= n && c > n } */
/** { p == factorial(c-1) && 1<= c && c-1 == n } */
/** { p == factorial(n) } */
```


Zusammenfassung Floyd-Hoare-Logik

- Die Logik abstrahiert über konkrete Systemzustände durch Zusicherungen (Hoare-Tripel $\{P\}\, c\, \{Q\}$).
- Zusicherungen sind boolsche Ausdrücke, angereichert durch logische Variablen.
- Semantische **Gültigkeit** von Hoare-Tripeln: $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$.
- Syntaktische **Herleitbarkeit** von Hoare-Tripeln: $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$
- Zuweisungen werden durch Substitution modelliert, d.h. die Menge der gültigen Aussagen ändert sich.
- Für Iterationen wird eine **Invariante** benötigt (die **nicht** hergeleitet werden kann).

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 6 vom 15.05.18: Invarianten und die Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Fahrplan

Invarianten

Invarianten Finden: die Fakultät

```
1 p= 1;
2 c= 1;
3 while (c <= n) {
4   p = p * c;
5   c = c + 1;
6 }
```

Invariante:

$$p = (c-1)! \wedge c - 1 \leq n \wedge c > 0$$

- Kern der Invariante: Fakultät bis $c-1$ berechnet.
- Invariante impliziert Nachbedingung
- Nebenbedingung für Weakening innerhalb der Schleife.

Invarianten finden

1. Initiale Invariante: momentaner Zustand der Berechnung
2. Invariante und negierte Schleifenbedingung muss Nachbedingung implizieren; ggf. Invariante verstärken.
3. Beweise innerhalb der Schleife benötigen ggf. weiter Nebenbedingungen; Invariante verstärken.

Zählende Schleifen

- Fakultät ist Beispiel für zählende Schleife (**for**).
- Für Nachbedigung ψ ist Invariante:

$$\psi[i-1/n] \wedge i - 1 \leq n$$

- Ggf. weitere Nebenbedingungen erforderlich

```
for (i= 0; i<= n; i++) {
  ...
  }
```

ist syntaktischer Zucker für

```
i= 0;
while (i<= n) {
  ...
  i= i+1;
  }
```


Beispiel 1

```
1 // {0 ≤ y}
2 x= 1;
3 c= 1;
4 while (c <= y) {
5   x= 2*x;
6   c= c+1;
7 }
8 // {x = 2^y}
```

- Invariante:

$$x = 2^{c-1} \wedge c - 1 \leq y$$

Beispiel 2

```
1 // {0 ≤ y}
2 x= 1;
3 c= 1;
4 while (c < y) {
5   c= c+1;
6   x= 2*x;
7 }
8 // {x = 2^y}
```

- Invariante:

$$x = 2^c \wedge c \leq y$$

Beispiel 2

```
1 // {0 ≤ y}
2 x= 1;
3 c= 0;
4 while (c < y) {
5   c= c+1;
6   x= 2*x;
7 }
8 // {x = 2^y}
```

- Invariante:

$$x = 2^c \wedge c \leq y$$

Beispiel 3

```
1 // {y = Y ∧ 0 ≤ y}
2 x= 1;
3 while (y != 0) {
4   x= 2*x;
5   y= y-1;
6 }
7 // {x = 2^Y}
```

- Invariante:

$$x = 2^{Y-y}$$

Beispiel 4

```
1 // {0 ≤ a}
2 r= a;
3 q= 0;
4 while (b <= r) {
5     r= r-b;
6     q= q+1;
7     }
8 // {a = b*q + r ∧ 0 ≤ r ∧ r < b}
```

Invariante:

$$a = b \cdot q + r \wedge 0 \leq r$$

- Spezieller Fall: letzter Teil der Nachbedingung ist genau negierte Schleifeninvariante

Beispiel 5

```
1 // {0 ≤ a}
2 t= 1;
3 s= 1;
4 i= 0;
5 while (s <= a) {
6     t= t+ 2;
7     s= s+ t;
8     i= i+ 1;
9     }
10 // {i^2 ≤ a ∧ a < (i+1)^2}
```

- Was berechnet das? Ganzzahlige Wurzel von a.
- Invariante:

$$s-t \leq a \wedge t = 2 \cdot i+1 \wedge s = i^2+t$$

- Nachbedingung 1: aus $s - t \leq a, s = i^2 + t$ folgt $i^2 \leq a$.
- Nachbedingung 2: aus $s = i^2 + t, t = 2 \cdot i + 1$ und $a < s$ folgt $a < (i+1)^2$.

Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls

Floyd-Hoare-Tripel: Gültigkeit und Herleitbarkeit

- Definition von letzter Woche: $P, Q \in \textbf{Assn}, c \in \textbf{Stmt}$

  $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$ "Hoare-Tripel gilt" (semantisch)

  $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$ "Hoare-Tripel herleitbar" (syntaktisch)

- **Frage**: $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\} \overset{?}{\rightsquigarrow} \models \{P\}\, c\, \{Q\}$
- **Korrektheit**: $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\} \overset{?}{\Longrightarrow} \models \{P\}\, c\, \{Q\}$
  - Wir können nur gültige Eigenschaften von Programmen herleiten.
- **Vollständigkeit**: $\models \{P\}\, c\, \{Q\} \overset{?}{\Longrightarrow} \vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$
  - Wir können alle gültigen Eigenschaften auch herleiten.

Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls

Der Floyd-Hoare-Kalkül ist korrekt.

Wenn $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$, dann $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$.

Beweis:

- Definition von $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$:

$$\models \{P\}\, c\, \{Q\} \iff \forall I.\, \forall \sigma.\, \sigma \models^I P \wedge \exists \sigma'.\, (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \Longrightarrow \sigma' \models^I Q$$

- Beweis durch **Regelinduktion** über der **Herleitung** von $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$.
- Bsp: Zuweisung, Sequenz, Weakening, While.
  - Zuweisung benötigt Lemma: $\sigma \models^I B[e/x] \iff \sigma[\mathcal{A}[\![e]\!](\sigma)/x] \models^I B$

Vollständigkeit der Floyd-Hoare-Logik

Floyd-Hoare-Logik ist vollständig modulo weakening.

Wenn $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$, dann $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$ bis auf die Bedingungen der Weakening-Regel.

- Beweis durch Konstruktion einer schwächsten Vorbedingung $\mathrm{wp}(c, Q)$.
  - Problemfall: while-Schleife.
- Wenn wir eine gültige Zusicherung nicht herleiten können, liegt das nur daran, dass wir eine Beweisverpflichtung nicht beweisen können.
- Logik erster Stufe ist unvollständig, also **können** wir gar nicht besser werden.

Zusammenfassung

- Invarianten finden in **drei Schritten**,
- Floyd-Hoare-Logik ist **korrekt**, wir können nur gültige Zusicherungen herleiten.
- Floyd-Hoare-Logik ist **vollständig** bis auf das Weakening.

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 7 vom 22.05.16: Strukturierte Datentypen: Strukturen und Felder

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Fahrplan

Motivation

- Immer nur ganze Zahlen ist doch etwas langweilig.
- Weitere Basisdatentypen von C (Felder, Zeichenketten, Strukturen)
- Noch rein funktional, keine Referenzen
- Nicht behandelt, aber nur syntaktischer Zucker: **enum**
- Prinzipiell: keine **union**

Arrays

- Beispiele:

```
int six[6] = {1,2,3,4,5,6};
int a[3][2];
int b[][] = { {1, 0},
              {3, 7},
              {5, 8} }; /* Ergibt Array [3][2] */
```

  - b [2][1] liefert 8, b [1][0] liefert 3
- Index startet mit 0, *row-major order*
- In C0: Felder als echte Objekte (in C: Felder $\cong$ Zeiger)
- Allgemeine Form:

```
typ name[groesse1][groesse2]...[groesseN] =
    { ... }
```

  - Alle Felder haben **feste Größe**.

Zeichenketten

- Zeichenketten sind in C (und C0) Felder von **char**, die mit einer Null abgeschlossen werden.
- Beispiel:

```
char hallo[5] = {'h', 'a', 'l', 'l', 'o', '\0' }
```

- Nützlicher syntaktischer Zucker:

```
char hallo[] = "hallo";
```

- Auswertung: hallo [4] liefert o

Strukturen

- Strukturen haben einen *structure tag* (optional) und Felder:

```
struct Vorlesung {
  char dozenten[2][30];
  char titel[30];
  int cp;
} ksgm;

struct Vorlesung pi3;
```

- Zugriff auf Felder über Selektoren:

```
int i = 0;
char name1[] = "Serge Autexier";
while (i < strlen(name1)) {
  ksgm.dozenten[0][i] = name1[i];
  i = i + 1;
}
```

- Rekursive Strukturen nur über Zeiger erlaubt (kommt noch)

C0: Erweiterte Ausdrücke

- **Lexp** beschreibt L-Werte (l-values), abstrakte Speicheradressen
- Neuer Basisdatentyp **C** für Zeichen
- Erweiterte Grammatik:

Lexp $l ::= \mathbf{Idt} \mid l[a] \mid l.\mathbf{Idt}$

Aexp $a ::= \mathbf{Z} \mid \mathbf{C} \mid \mathbf{Lexp} \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1/a_2$

Bexp $b ::= \mathbf{1} \mid \mathbf{0} \mid a_1 == a_2 \mid a_1 < a_2 \mid !\, b \mid b_1 \,\&\&\, b_2 \mid b_1 \,||\, b_2$

Exp $e ::= \mathbf{Aexp} \mid \mathbf{Bexp}$

Werte und Zustände

- Zustände bilden **strukturierte** Adressen auf Werte (wie vorher) ab.

Systemzustände

- **Locations:** $\mathbf{Loc} ::= \mathbf{Idt} \mid \mathbf{Loc}[\mathbb{Z}] \mid \mathbf{Loc}.\mathbf{Idt}$
- Werte: $\mathbf{V} = \mathbb{Z}$
- Zustände: $\Sigma \stackrel{def}{=} \mathbf{Loc} \rightharpoonup \mathbf{V}$

- Wir betrachten nur Zugriffe vom Typ **Z** oder **C** (**elementare Typen**)
- Nützliche Abstraktion des tatsächliche C-Speichermodells

Beispiel

Programm

```
struct A {
 int c[2];
 struct B {
  char name[20];
 } b;
};

struct A x[] = {
 {{1,2},
  {{'n','a','m','e','1','\0'}}
 },
 {{3,4},
  {{'n','a','m','e','2','\0'}}
 }
};
```

Zustand

$x[0].c[0] \mapsto 1$	$x[1].c[0] \mapsto 3$
$x[0].c[1] \mapsto 2$	$x[1].c[1] \mapsto 4$
$x[0].b.name[0] \mapsto$ 'n'	$x[1].b.name[0] \mapsto$ 'n'
$x[0].b.name[1] \mapsto$ 'a'	$x[1].b.name[1] \mapsto$ 'a'
$x[0].b.name[2] \mapsto$ 'm'	$x[1].b.name[2] \mapsto$ 'm'
$x[0].b.name[3] \mapsto$ 'e'	$x[1].b.name[3] \mapsto$ 'e'
$x[0].b.name[4] \mapsto$ '1'	$x[1].b.name[4] \mapsto$ '2'
$x[0].b.name[5] \mapsto$ '\0'	$x[1].b.name[5] \mapsto$ '\0'

Operationale Semantik: L-Werte

- **Lexp** m wertet zu **Loc** l aus: $\langle m, \sigma\rangle \to_{Lexp} l \mid \bot$

$$\frac{x \in \mathbf{Idt}}{\langle x, \sigma\rangle \to_{Lexp} x}$$

$$\frac{\langle m, \sigma\rangle \to_{Lexp} l \qquad \langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} i \neq \bot}{\langle m[a], \sigma\rangle \to_{Lexp} l[i]}$$

$$\frac{\langle m, \sigma\rangle \to_{Lexp} l \qquad \langle a, \sigma\rangle \to_{Aexp} \bot}{\langle m[a], \sigma\rangle \to_{Lexp} \bot}$$

$$\frac{\langle m, \sigma\rangle \to_{Lexp} l}{\langle m.i, \sigma\rangle \to_{Lexp} l.i}$$

Operationale Semantik: Ausdrücke und Zuweisungen

- Ein L-Wert als Ausdruck wird ausgewertet, indem er ausgelesen wird:

$$\frac{\langle m, \sigma\rangle \to_{Lexp} l \qquad l \in Dom(\sigma)}{\langle m, \sigma\rangle \to_{Aexp} \sigma(l)}$$

$$\frac{\langle m, \sigma\rangle \to_{Lexp} l \qquad l \notin Dom(\sigma)}{\langle , \sigma\rangle \to_{Aexp} \bot}$$

- Zuweisungen sind nur definiert für elementare Typen:

$$\frac{\langle m :: \tau, \sigma\rangle \to_{Lexp} l \qquad \langle e :: \tau, \sigma\rangle \to v \qquad \tau \text{ elementarer Typ}}{\langle m = e, \sigma\rangle \to_{Stmt} \sigma[v/l]}$$

- Die restlichen Regeln bleiben

Denotationale Semantik

- Denotation für **Lexp**:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\![x]\!] &= \{(\sigma, x) \mid \sigma \in \Sigma\}\\ \mathcal{L}[\![m[a]]\!] &= \{(\sigma, l[i]) \mid (\sigma, l) \in \mathcal{L}[\![m]\!], (\sigma, i) \in \mathcal{A}[\![a]\!]\}\\ \mathcal{L}[\![m.i]\!] &= \{(\sigma, m.i) \mid (\sigma, l) \in \mathcal{L}[\![m]\!]\}\end{aligned}$$

- Denotation für **Zuweisungen**:

$$\mathcal{C}[\![m = e]\!] = \{(\sigma, \sigma[v/l]) \mid (\sigma, l) \in \mathcal{L}[\![m]\!], (\sigma, v) \in \mathcal{A}[\![e]\!]\}$$

Floyd-Hoare-Kalkül

- Die Regeln des Floyd-Hoare-Kalküls berechnen geltende Zusicherungen
- Nötige Änderung: Substitution in Zusicherungen
  - Jetzt werden **Lexp** ersetzt, keine **Idt**
  - Gleichheit und Ungleichheit von **Lexp** nicht immer entscheidbar
  - Problem: Feldzugriffe

Beispiel

```
int a[3];
/** { 1 } */
/** { 3 = 3 and 3 = 3 } */
a[2] = 3;
/** { a[2] = 3 and a[2] = 3 } */
/** { 4 = 4 and a[2] = 3 and 4 * a[2] = 12 } */
a[1] = 4;
/** { a[1] = 4 and a[2] = 3 and a[1] * a[2] = 12 } */
/** { 5 = 5 and a[1] = 4 and a[2] = 3 and
      5 * a[1] * a[2] = 60 } */
a[0] = 5;
/** { a[0] = 5 and a[1] = 4 and a[2] = 3 and
      a[0] * a[1] * a[2] = 60 } */
```


Beispiel: Problem

```
int a[3];
int i;
/** { 0 <= i < 2 } */
a[0] = 3;
a[1] = 7;
a[2] = 9;
a[i] = -1;
/** { a[1] == 7 }
```


Erstes Beispiel: Ein Feld initialisieren

```
1  // {n ≤ 0}
2  i = 0;
3  while (i < n) {
4    a[i] = i;
5    i = i+1;
6    // {(∀j.0 ≤ j < i ⟶ a[j] = j) ∧ i ≤ n}
7    }
8  // {∀j.0 ≤ j < n ⟶ a[j] = j}
```

- Wichtiges Theorem:

$$(\forall j.\, 0 \le j < n \longrightarrow P[j]) \wedge P[n] \Longrightarrow \forall j.\, 0 \le j < n+1 \longrightarrow P[j]$$

Längeres Beispiel: Suche nach dem maximalen Element

```
1  // {0 < n}
2  i= 0;
3  r= 0;
4  while (i< n) {
5    if (a[r] < a[i]) {
6      r= i;
7      }
8    else {
9      }
10   i= i+1;
11   // {(∀j. 0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ i ≤ n ∧ 0 ≤ r < n}
12   }
13 // {(∀j. 0 ≤ j < n ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ r < n}
```


Längeres Beispiel: Suche nach einem Null-Element

```
1  // {0 ≤ n}
2  i= 0;
3  r= −1;
4  while (i< n) {
5    if (a[i] == 0) {
6      r= i;
7      }
8    else {
9      }
10   i= i+1;
11   // {(r ≠ −1 ⟶ 0 ≤ r < i ∧ a[r] = 0) ∧ 0 ≤ i ≤ n}
12   }
13 // {r ≠ −1 ⟶ 0 ≤ r < n ∧ a[r] = 0}
```

- Spezifikation zu schwach: wann ist $r = -1$?

Längeres Beispiel: Suche nach einem Null-Element

```
1  // {0 ≤ n}
2  i= 0;
3  r= −1;
4  while (i< n) {
5    if (a[i] == 0) {
6      r= i;
7      }
8    else {
9      }
10   i= i+1;
11   // {(r ≠ −1 ⟶ 0 ≤ r < i ∧ a[r] = 0)
         ∧(r = −1 ⟶ ∀j. 0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≠ 0)
         ∧0 ≤ i ≤ n}
12   }
13 // {(r ≠ −1 ⟶ 0 ≤ r < n ∧ a[r] = 0)
       ∧(r = −1 ⟶ ∀j. 0 ≤ j < n ⟶ a[j] ≠ 0)}
```


Längeres Beispiel: Suche nach dem ersten Null-Element

```
1  // {0 ≤ n}
2  i= 0;
3  r= −1;
4  while (i< n) {
5    if (r== −1 && a[i] == 0) {
6      r= i;
7      }
8    else {
9      }
10   i= i+1;
11   // {(r ≠ −1 ⟶ 0 ≤ r < i ∧ a[r] = 0 ∧ (∀j.0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≠ 0))
         ∧(r = −1 ⟶ ∀j. 0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≠ 0)
         0 ≤ i ≤ n}
12   }
13 // {(r ≠ −1 ⟶ 0 ≤ r < n ∧ a[r] = 0 ∧ (∀j.0 ≤ j < r ⟶ a[j] ≠ 0))
       ∧(r = −1 ⟶ ∀j. 0 ≤ j < n ⟶ a[j] ≠ 0)}
```


Zusammenfassung

- Strukturierte Datentypen (Felder und Structs) erfordern strukturierte Adressen
- Abstraktion über „echtem“ Speichermodell
- Änderungen in der Semantik und im Floyd-Hoare-Kalkül überschaubar
- ... aber mit erheblichen Konsequenzen: Substitution

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 8 vom 29.05.18: Modellierung und Spezifikation

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Fahrplan

Erstes Beispiel: Ein Feld initialisieren

```
1 // {n ≤ 0}
2 i= 0;
3 while (i< n) {
4   a[i]= i;
5   i= i+1;
6   // {(∀j.0 ≤ j < i ⟶ a[j] = j) ∧ i ≤ n}
7   }
8 // {∀j.0 ≤ j < n ⟶ a[j] = j}
```

- Wichtiges Theorem:

$$(\forall j.\, 0 \le j < n \longrightarrow P[j]) \land P[n] \longrightarrow \forall j.\, 0 \le j < n+1 \longrightarrow P[j]$$

Längeres Beispiel: Suche nach dem maximalen Element

```
1  // {0 < n}
2  i= 0;
3  r= 0;
4  while (i< n) {
5    if (a[r] < a[i]) {
6      r= i;
7      }
8    else {
9      }
10   i= i+1;
11   // {(∀j.0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ i ≤ n ∧ 0 ≤ r < n}
12   }
13 // {(∀j.0 ≤ j < n ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ r < n}
```


Sortierte Arrays?

- Wie formulieren wir, dass ein Array sortiert ist? Ggf. bis zu einem bestimmten Punkt n sortiert ist?

```
int a[8];
// {∀0 ≤ j ≤ n < 6.a[j] ≤ a[j+1]}
```

- Alternativ würden man auch gerne ein Prädikat definieren können

$//\{\forall a.\mathit{sorteduntil}(a,0) \longleftrightarrow \mathit{true}\}$
$//\{\forall a.\forall i.i \ge 0 \longrightarrow (\mathit{sorteduntil}(a,i+1) \longleftrightarrow (a[i] \le a[i+1] \land \mathit{sorteduntil}(a,i)))\}$

Formelsprache mit Quantoren

- Wir brauchen Programmausdrücken wie **Aexp**
- Wir müssen neue Funktionen verwendenn können
  - Etwa eine Fakultätsfunkion
- Wir müssen neue Prädikate definieren können
  - Etwa einen `sorteduntil`
- Wir müssen Formeln bilden können
  - Analog zu **Bexp**
  - Zusätzlich mit Implikation $\longrightarrow$, Äquivalenz $\longleftrightarrow$
  - Zusätzlich Quantoren über logische Variablen wie in

$$(\forall j.\, 0 \le j < n \longrightarrow P[j]) \land P[n] \longrightarrow \forall j.\, 0 \le j < n+1 \longrightarrow P[j]$$
$$\forall i.i \ge 0 \longrightarrow (\mathit{sorteduntil}(a,i+1) \longleftrightarrow (a[i] \le a[i+1] \land \mathit{sorteduntil}(a,i)))$$

Was brauchen wir?

- Definiere Terme als Variablen und Funktionen besimmter Stelligkeit
- Definiere Literale und Formeln
- Interpretation von Formeln
  - mit und ohne Programmvariablen

Zusicherungen (Assertions)

- Erweiterung von **Aexp** and **Bexp** durch
  - **Logische** Variablen **Var** $v := N, M, L, U, V, X, Y, Z$
  - ~~Definierte Funktionen und Prädikate über **Aexp**~~ ~~$n!, \sum_{i=1}^{n} i, \ldots$~~
  - Funktionen und Prädikate selbst definieren
  - Implikation, Äquivalenzen und Quantoren
    $b_1 \longrightarrow b_2, b_1 \longleftrightarrow b_2, \forall v_{(\mathbf{Z}|\mathbf{C}|\mathrm{Array})}.\, b, \exists v_{(\mathbf{Z}|\mathbf{C}|\mathrm{Array})}.\, b$
- Formal:

$$\begin{array}{rll}
\textbf{Lexp} & l ::= & \textbf{Idt} \mid l[a] \mid l.\textbf{Idt} \\
\textbf{Aexpv} & a ::= & \mathbf{Z} \mid \textbf{Idt} \mid \textbf{Var} \mid \mathbf{C} \mid \textbf{Lexp} \\
 & & \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 \times a_2 \\
 & & \mid f(e_1, \ldots, e_n) \\
\textbf{Assn} & b ::= & \mathbf{1} \mid \mathbf{0} \mid a_1 == a_2 \mid a_1 != a_2 \mid a_1 <= a_2 \\
 & & \mid !\, b \mid b_1 \,\&\&\, b2 \mid b_1 \mid\mid b_2 \\
 & & \mid b_1 \longrightarrow b_2 \mid b_1 \longleftrightarrow b_2 \mid p(e_1, \ldots, e_n) \\
 & & \mid \forall v_{(\mathbf{Z}|\mathbf{C}|\mathrm{Array})}.\, b \mid \exists v_{(\mathbf{Z}|\mathbf{C}|\mathrm{Array})}.\, b
\end{array}$$

Erfüllung von Zusicherungen

- Wann gilt eine Zusicherung $b \in \mathbf{Assn}$ in einem Zustand σ?
  - Auswertung (denotationale Semantik) ergibt *true*
- **Belegung** der logischen Variablen: $I : \mathbf{Var} \to (\mathbf{Z} \cup \mathbf{C} \cup \text{Array})$
- Semantik von b unter der Belegung I: $\mathcal{B}_v[\![b]\!]^I, \mathcal{A}_v[\![a]\!]^I$

$$\mathcal{A}_v[\![I]\!]^I = \{(\sigma, \sigma(i)) \mid (\sigma, i) \in \mathcal{L}_v[\![I]\!]^I, i \in Dom(\sigma)\}$$

Denotationale Semantik

- Denotation für **Lexp**unter der Belegung I:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v[\![x]\!]^I &= \{(\sigma, x) \mid \sigma \in \Sigma\}\\ \mathcal{L}_v[\![m[a]]\!]^I &= \{(\sigma, I[i]) \mid (\sigma, I) \in \mathcal{L}_v[\![m]\!]^I, (\sigma, i) \in \mathcal{A}[\![a]\!]^I\}\\ \mathcal{L}_v[\![m.i]\!]^I &= \{(\sigma, m.i) \mid (\sigma, I) \in \mathcal{L}_v[\![m]\!]^I\}\end{aligned}$$

- Denotation für **Aexp**unter der Belegung I:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_v[\![I]\!]^I &= \{(\sigma, \sigma(i) \mid (\sigma, i) \in \mathcal{L}_v[\![I]\!]^I, i \in Dom(\sigma)\} && I \in \mathbf{Lexp}\\ \mathcal{A}_v[\![v]\!]^I &= \{(\sigma, I(v))\} && v \in \mathbf{Var}\end{aligned}$$

Grenzen der Denotationalen Semantik

- Problem mit selbst-definierten Funktionen: $\mathcal{A}_v[\![f(a_1, \ldots, a_n)]\!]^I = ?$
- Problem mit selbst-definierten Prädikaten: $\mathcal{B}_v[\![p(a_1, \ldots, a_n)]\!]^I = ?$
- Betrachte Gleichung:

$$\forall v_{\mathbf{Z}}.f(v) = t$$

so dass all in t vorkommenden Operationen eine denotationale Semantik haben (und f nicht in t vorkommt).

  - Dies gibt der Funktion f eine Semantik, nämlich f.a. Programmzustände σ:

$$\mathcal{A}_v[\![f(a)]\!]^I(\sigma) = \mathcal{A}_v[\![t]\!]^{I'}(\sigma) \text{ mit } I' := I[\mathcal{A}_v[\![a]\!]^I(\sigma)/v]$$

  - Was ist wenn es mehrere solche Gleichungen gibt? Was ist wenn das nicht terminiert?
    $\Longrightarrow$ Nur eindeutig definierte, terminierende Definition (konservative Erweiterungen)
    $\Longrightarrow$ Wird nicht weiter vertieft in dieser Vorlesung; alle im Folgenden verwendete Definition sind derart.
  - Analog für Prädikate

Erfüllung von Zusicherungen

- Wann gilt eine Zusicherung $b \in \mathbf{Assn}$ in einem Zustand σ?
  - Auswertung (denotationale Semantik) ergibt *true*
- **Belegung** der logischen Variablen: $I : \mathbf{Var} \to (\mathbf{Z} \cup \mathbf{C} \cup \text{Array})$
- Semantik von b unter der Belegung I:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_v[\![\forall v_{\mathbf{Z}}.b]\!]^I = \{&(\sigma, 1) \mid \text{für alle } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, 1) \in \mathcal{B}_v[\![b]\!]^{I[i/v]}\}\\ \cup \{&(\sigma, 0) \mid \text{für ein } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, 0) \in \mathcal{B}_v[\![b]\!]^{I[i/v]}\}\\ \mathcal{B}_v[\![\exists v_{\mathbf{Z}}.b]\!]^I = \{&(\sigma, 1) \mid \text{für ein } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, 1) \in \mathcal{B}_v[\![b]\!]^{I[i/v]}\}\\ \cup \{&(\sigma, 0) \mid \text{für alle } i \in \mathbf{Z} \text{ gilt } (\sigma, 0) \in \mathcal{B}_v[\![b]\!]^{I[i/v]}\}\end{aligned}$$

Analog für $\forall v_{\mathbf{C}}.b$, $\exists v_{\mathbf{C}}.b$, $\forall v_{\text{Array}}.b$ und $\exists v_{\text{Array}}.b$

Erfülltheit von Zusicherungen

Erfülltheit von Zusicherungen

$b \in \mathbf{Assn}$ ist in Zustand σ mit Belegung I erfüllt ($\sigma \models^I b$), gdw

$$\mathcal{B}_v[\![b]\!]^I(\sigma) = true$$

Denotation für Zuweisungen

$$\mathcal{C}_v[\![m = e]\!]^I = \{(\sigma, \sigma[v/I]) \mid (\sigma, I) \in \mathcal{L}_v[\![m]\!]^I, (\sigma, v) \in \mathcal{A}_v[\![e]\!]^I\}$$

Formeln ohne Programmvariablen, ohne Arrays, ohne Strukturen

- Eine Formel $b \in \mathbf{Assn}$ ist pur, wenn sie weder Programmvariablen, noch Strukturen, noch Felder enthält (also keine Teilterme aus **Lexp** und **Idt**.
- Eine Formel ist geschlossen, wenn sie pur ist und keine freien logischen Variablen enthält.
- Sei $\mathbf{Assn}^c \subseteq \mathbf{Assn}$ die Menge der geschlossenen Formeln

Lemma

Für eine geschlossene Formel b ist der Wahrheitswert $\mathcal{B}_v[\![b]\!]^I(\sigma)$ von b unabhängig von I und σ.

- Sei Γ eine endliche Menge von Formeln, dann definieren wir

$$\bigwedge \Gamma := \begin{cases} b_1 \,\&\&\, \ldots \,\&\&\, b_n & \text{für alle } b_i \in \Gamma, \Gamma \neq \emptyset \\ 1 & \text{falls } \Gamma = \emptyset \end{cases}$$

Erfülltheit von Zusicherungen unter Kontext

Erfülltheit von Zusicherungen unter Kontext

Sei $\Gamma \subseteq \mathbf{Assn}^c$ eine endliche Menge und $b \in \mathbf{Assn}$. Im Kontext Γ ist b in Zustand σ mit Belegung I erfüllt ($\Gamma, \sigma \models^I b$), gdw

$$\mathcal{B}_v[\![\Gamma \longrightarrow b]\!]^I(\sigma) = true$$

Floyd-Hoare-Tripel mit Kontext

- Sei $\Gamma \in \mathbf{Assn}^c$ und $P, Q \subseteq \mathbf{Assn}$

Partielle Korrektheit unter Kontext ($\Gamma \models \{P\}\, c\, \{Q\}$)

c ist **partiell korrekt**, wenn für alle Zustände σ und alle Belegungen I die unter Kontext Γ P erfüllen, gilt:
wenn die Ausführung von c mit σ in σ' terminiert, **dann** erfüllen σ' und I im Kontext Γ auch Q.

$$\Gamma \models \{P\}\, c\, \{Q\} \iff \forall I.\, \forall \sigma.\, \Gamma, \sigma \models^I P \wedge \exists \sigma'.\, (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c]\!] \Longrightarrow \Gamma, \sigma' \models^I Q$$

Floyd-Hoare-Kalkül mit Kontext

$$\frac{}{\Gamma \vdash \{P[e/x]\}\, x = e\, \{P\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{A \,\&\&\, b\}\, c_0\, \{B\} \qquad \Gamma \vdash \{A \,\&\&\, \neg b\}\, c_1\, \{B\}}{\Gamma \vdash \{A\}\ \textbf{if}\ (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1\, \{B\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{A \wedge b\}\, c\, \{A\}}{\Gamma \vdash \{A\}\ \textbf{while}(b)\ c\, \{A \wedge \neg b\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{A\}\, c_1\, \{B\} \qquad \Gamma \vdash \{B\}\, c_2\, \{C\}}{\Gamma \vdash \{A\}\, c_1; c_2\, \{C\}}$$

Floyd-Hoare-Kalkül mit Kontext

$$\frac{\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A) \qquad \Gamma \vdash \{A\}\, c\, \{B\} \qquad \Gamma \longrightarrow (B \longrightarrow B')}{\Gamma \vdash \{A'\}\, c\, \{B'\}}$$

und es muss gezeigt werden für alle Zustände σ und Belegungen I dass $\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A)$ wahr bzw. dass

$$\mathcal{B}_v[\![\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A)]\!]^I(\sigma) = 1$$

(Analog für $\Gamma \longrightarrow (B \longrightarrow B')$).

Problem

$\mathcal{B}_v[\![.]\!]^I(\sigma)$ *im Allgemeinen nicht berechenbar wegen*

$$\mathcal{B}_v[\![\forall_{\mathbf{Z}} v.b]\!]^I = \{(\sigma,1) \mid \textit{für alle } i \in \mathbf{Z} \textit{ gilt } (\sigma,1) \in \mathcal{B}_v[\![b]\!]^{I[i/v]}\}$$
$$\cup \{(\sigma,0) \mid \textit{für ein } i \in \mathbf{Z} \textit{ gilt } (\sigma,0) \in \mathcal{B}_v[\![b]\!]^{I[i/v]}\}$$

Spezifikation von Funktionen

- Verwendung von geschlossenen Formeln zur Spezifikation von Funktionen und Prädikaten als Kontext
- Fakultät: $n!$ aka factorial(n):

$$\text{factorial}(0) == 1$$
$$\forall n_{\mathbf{Z}}.(n > 0) \longrightarrow \text{factorial}(n+1) == (n+1) \times \text{factorial}(n)$$

- $\sum_{i=0}^{n}$ aka sumup(n):

$$\text{sumup}(0) == 0$$
$$\forall x_{\mathbf{Z}}.(x \geq 0) \longrightarrow \text{sumup}(x+1) == (x+1) + \text{sumup}(x)$$

Spezifikation von Prädikaten

- Gerade und Ungerade:

$$\forall n_{\mathbf{Z}}.\, \text{Gerade}(n) \longleftrightarrow \exists q_{\mathbf{Z}}.n == 2 \times q$$
$$\forall n_{\mathbf{Z}}.\, \text{UnGerade}(n) \longleftrightarrow \exists q_{\mathbf{Z}}.n == 2 \times q + 1$$

- Sortierte Arrays:

$$\forall a_{\text{Array}[\mathbf{Z}]}.\, \text{sorteduntil}(a, 0) \longleftrightarrow 1$$
$$\forall a_{\text{Array}[\mathbf{Z}]}.\forall i_{\mathbf{Z}}.i \geq 0 \longrightarrow (\text{sorteduntil}(a, i+1) \longleftrightarrow (a[i] \leq a[i+1] \wedge \text{sorteduntil}(a, i)))$$

Das Fakultätsbeispiel

$\Gamma = \{\text{Def. von factorial}\}$:

```
/** { 1 == factorial(0) && 0 <= n } */
/** { 1 == factorial(1- 1) && 1 <= 1 && 1-1 <= n } */
p= 1;
/** { p == factorial(1- 1) && 1 <= 1 && 1-1 <= n } */
c= 1;
/** { p == factorial(c- 1) && 1 <= c && c-1 <= n } */
while (c<= n) {
  /** { p == factorial(c-1) && 1<= c && c-1 <= n && c <= n } */
  /** { p*c == factorial(c-1)* c && 1 <= c && c <= n } */
  /** { p*c == factorial(c) && 1 <= c && c <= n } */
  /** { p*c == factorial((c+1)- 1) && 1 <= c+1 && (c+1)-1 <= n } */
  p= p*c;
  /** { p == factorial((c+1)-1) && 1<= c+1 && (c+1)-1 <= n } */
  c= c+1;
  /** { p == factorial(c-1) && 1 <= c && c-1 <= n } */
  }
/** { p == factorial(c-1) && 1<= c && c-1 <= n &&
      factorial(c <= n) } */
/** { p == factorial(c-1) && 1<= c && c-1 <= n && c > n } */
/** { p == factorial(c-1) && 1<= c && c-1 == n } */
/** { p == factorial(n) } */
```


Zurück zum Problem

- Man braucht Rechenverfahren, um $\Gamma \longrightarrow (A' \longrightarrow A)$ etc. zu beweisen
- Man braucht Regeln um Wahre Aussagen herleiten zu können
  - Analog zu operationaler Semantik, aber für logisches Schließen
  - Regelmenge K (Kalkülregeln) die Formeln aus anderen Formeln ableiten.

Natürliches Schließen — Die Regeln

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \,\&\&\, \psi}\ \&\&I \qquad \frac{\phi \,\&\&\, \psi}{\phi}\ \&\&E_L \qquad \frac{\phi \,\&\&\, \psi}{\psi}\ \&\&E_R$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\phi \longrightarrow \psi}\longrightarrow I \qquad \frac{\phi \quad \phi \longrightarrow \psi}{\psi}\longrightarrow E$$

$$\frac{\mathbf{0}}{\phi}\,\mathbf{0} \qquad \frac{\begin{array}{c}[\phi \longrightarrow \mathbf{0}]\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{array}}{\phi}\ \text{raa}$$

Die fehlenden Schlußregeln

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{array}}{\neg\phi}\,\neg I \qquad \frac{\phi \quad \neg\phi}{\mathbf{0}}\,\neg E$$

$$\frac{\phi}{\phi \,||\, \psi}\,||I_L \qquad \frac{\psi}{\phi \,||\, \psi}\,||I_R \qquad \frac{\phi \,||\, \psi \quad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\,||E$$

$$\frac{\phi \longrightarrow \psi \quad \psi \longrightarrow \phi}{\phi \longleftrightarrow \psi}\longleftrightarrow I \qquad \frac{\phi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\psi}\longleftrightarrow E_L \qquad \frac{\psi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\phi}\longleftrightarrow E_R$$

Regeln für die Gleichheit

- **Reflexivität**, **Symmetrie**, **Transitivität**:

$$\frac{}{x == x}\ \text{refl} \qquad \frac{x == y}{y == x}\ \text{sym} \qquad \frac{x == y \quad y == z}{x == z}\ \text{trans}$$

- **Kongruenz**:

$$\frac{x_1 == y_1, \ldots, x_n == y_n}{f(x_1, \ldots, x_n) == f(y_1, \ldots, y_n)}\ \text{cong}$$

- **Substitutivität**:

$$\frac{x_1 = y_1, \ldots, x_m = y_m \quad P(x_1, \ldots, x_m)}{P(y_1, \ldots, y_m)}\ \text{subst}$$

Prädikatenlogik mit Induktion

- Sei $\text{fix}(\hat{K})$ die Menge aller mittels Kalkülregeln ableitbaren Formeln.
- K ist korrekt:

$$\text{f.a. } F \in \text{fix}(K) \text{ gilt: f.a. } \sigma, I.\ \mathcal{B}_\nu[\![F]\!]^I(\sigma) = 1.$$

- K ist vollständig:

$$\text{f.a. } F \text{ mit f.a. } \sigma, I.\ \mathcal{B}_\nu[\![F]\!]^I(\sigma) = 1 \text{ gilt: } F \in \text{fix}(K).$$

- Eine Logik L ist entscheidbar, wenn für alle Formeln F entschieden werden kann ob $\mathcal{B}_\nu[\![F]\!]^I(\sigma) = 1$ oder $\mathcal{B}_\nu[\![F]\!]^I(\sigma) = 0$
- Für unsere Belange brauchen wir als Logik Prädikatenlogik mit Gleichheit und Induktion (wegen Rekursion):
  - Es gibt für diese Logik korrekte Kalküle, aber keine vollständigen (und sie ist auch nicht entscheidbar).

Fahrplan

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 9 vom 05.06.18: Verifikationsbedingungen

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Fahrplan

Idee

- Hier ist ein einfaches Programm:

```
// {X = x ∧ Y = y}
z = y;
// {X = x ∧ Y = z}
y = x;
// {X = y ∧ Y = z}
x = z;
// {X = y ∧ Y = x}
```

- Wir sehen:
  1. Die Verifikation erfolgt **rückwärts** (von hinten nach vorne).
  2. Die Verifikation kann **berechnet** werden.
- Geht das immer?

Rückwärtsanwendung der Regeln

- Zuweisungsregel kann **rückwärts** angewandt werden, weil die Nachbedingung eine offene Variable ist — P passt auf jede beliebige Nachbedingung.

$$\frac{}{\vdash \{P[e/x]\}\, x = e\, \{P\}}$$

- Was ist mit den anderen Regeln? Nur **while** macht Probleme!

$$\frac{}{\vdash \{A\}\, \{\}\, \{A\}} \qquad \frac{\vdash \{A \wedge b\}\, c_0\, \{B\} \qquad \vdash \{A \wedge \neg b\}\, c_1\, \{B\}}{\vdash \{A\}\ \textbf{if}\ (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1\, \{B\}}$$

$$\frac{\vdash \{A\}\, c_1\, \{B\} \qquad \vdash \{B\}\, c_2\, \{C\}}{\vdash \{A\}\, c_1; c_2\, \{C\}} \qquad \frac{\vdash \{A \wedge b\}\, c\, \{A\}}{\vdash \{A\}\ \textbf{while}\ (b)\ c\, \{A \wedge \neg b\}}$$

$$\frac{A' \Longrightarrow A \qquad \vdash \{A\}\, c\, \{B\} \qquad B \Longrightarrow B'}{\vdash \{A'\}\, c\, \{B'\}}$$

Berechnung von Vorbedingungen

- Die Rückwärtsrechnung von einer gegebenen Nachbedingung entspricht der Berechnung einer Vorbedingung.
- Gegeben C0-Programm c, Prädikat Q, dann ist
  - $\mathrm{wp}(c, Q)$ die **schwächste Vorbedingung** P so dass $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$;
  - Prädikat P **schwächer** als P' wenn $P' \Longrightarrow P$
- Semantische Charakterisierung:

Schwächste Vorbedingung

Gegeben Zusicherung $Q \in \mathbf{Assn}$ und Programm $c \in \mathbf{Stmt}$, dann

$$\models \{P\}\, c\, \{Q\} \Longleftrightarrow P \Longrightarrow \mathrm{wp}(c, Q)$$

- Wie können wir $\mathrm{wp}(c, Q)$ berechnen?

Berechnung von $\mathrm{wp}(c, Q)$

- Einfach für Programme ohne Schleifen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{wp}(\{\}, P) &\stackrel{def}{=} P \\
\mathrm{wp}(x = e, P) &\stackrel{def}{=} P[e/x] \\
\mathrm{wp}(c_1; c_2, P) &\stackrel{def}{=} \mathrm{wp}(c_1, \mathrm{wp}(c_2, P)) \\
\mathrm{wp}(\textbf{if}\ (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1, P) &\stackrel{def}{=} (b \wedge \mathrm{wp}(c_0, P)) \vee (\neg b \wedge \mathrm{wp}(c_1, P))
\end{aligned}$$

- Für Schleifen: nicht entscheidbar.
  - "Cannot in general compute a **finite** formula" (Mike Gordon)
- Wir können rekursive Formulierung angeben:

$$\mathrm{wp}(\textbf{while}\ (c)\ ,P) \stackrel{def}{=} (\neg b \wedge P) \vee (b \wedge \mathrm{wp}(c, \mathrm{wp}(\textbf{while}\ (b)\ c, P)))$$

  - Hilft auch nicht weiter...

Lösung: Annotierte Programme

- Wir helfen dem Rechner weiter und **annotieren** die Schleifeninvariante am Programm.
- Damit berechnen wir:
  - die **approximative** schwächste Vorbedingung $\mathrm{awp}(c, Q)$
  - zusammen mit einer Menge von **Verifikationsbedingungen** $\mathrm{wvc}(c, Q)$
- Die Verifikationsbedingungen treten dort auf, wo die Weakening-Regel angewandt wird.
- Es gilt:

$$\bigwedge \mathrm{wvc}(c, Q) \Longrightarrow \models \{\mathrm{awp}(c, Q)\}\, c\, \{Q\}$$

Approximative schwächste Vorbedingung

- Für die **while**-Schleife:

$$\begin{aligned}
\mathrm{awp}(\textbf{while}\ (b)\ /{**}\,\textbf{inv}\ i\ {*}/\ c, P) &\stackrel{def}{=} i \\
\mathrm{wvc}(\textbf{while}\ (b)\ /{**}\,\textbf{inv}\ i\ {*}/\ c, P) &\stackrel{def}{=} \mathrm{wvc}(c, i, \\
&\quad) \cup \{i \wedge b \longrightarrow \mathrm{awp}(c, i)\} \\
&\quad \cup \{i \wedge \neg b \longrightarrow P\}
\end{aligned}$$

- Entspricht der **while**-Regel (1) mit Weakening (2):

$$\frac{\vdash \{A \wedge b\}\, c\, \{A\}}{\vdash \{A\}\ \textbf{while}\ (b)\ c\, \{A \wedge \neg b\}} \quad (1)$$

$$\frac{A \wedge b \Longrightarrow C \qquad \vdash \{C\}\, c\, \{A\} \qquad A \wedge \neg b \Longrightarrow B}{\vdash \{A\}\ \textbf{while}\ (b)\ c\, \{B\}} \quad (2)$$

Überblick: Approximative schwächste Vorbedingung

$$
\begin{array}{rl}
\mathsf{awp}(\{\,\},P) & \stackrel{def}{=} P \\
\mathsf{awp}(x=e,P) & \stackrel{def}{=} P[e/x] \\
\mathsf{awp}(c_1;c_2,P) & \stackrel{def}{=} \mathsf{awp}(c_1,\mathsf{awp}(c_2,P)) \\
\mathsf{awp}(\textbf{if } (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1,P) & \stackrel{def}{=} (b\wedge \mathsf{awp}(c_0,P))\vee(\neg b\wedge \mathsf{awp}(c_1,P)) \\
\mathsf{awp}(\textbf{while } (b)\ /{**}\,\textbf{inv}\ i\ {*}/\ c,P) & \stackrel{def}{=} i
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\mathsf{wvc}(\{\,\},P) & \stackrel{def}{=} \emptyset \\
\mathsf{wvc}(x=e,P) & \stackrel{def}{=} \emptyset \\
\mathsf{wvc}(c_1;c_2,P) & \stackrel{def}{=} \mathsf{wvc}(c_1,\mathsf{awp}(c_2,P))\cup\mathsf{wvc}(c_2,P) \\
\mathsf{wvc}(\textbf{if } (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1,P) & \stackrel{def}{=} \mathsf{wvc}(c_0,P)\cup\mathsf{wvc}(c_1,P) \\
\mathsf{wvc}(\textbf{while } (b)\ /{**}\,\textbf{inv}\ i\ {*}/\ c,P) & \stackrel{def}{=} \mathsf{wvc}(c,i)\cup\{i\wedge b\longrightarrow \mathsf{awp}(c,i)\}\\
& \qquad\cup\{i\wedge\neg b\longrightarrow P\} \\
wvc(\{P\}\,c\,\{Q\}) & \stackrel{def}{=} \{P\longrightarrow \mathsf{awp}(c,Q)\}\cup\mathsf{wvc}(c,Q)
\end{array}
$$

Beispiel: das Fakultätsprogramm

- In der Praxis sind Vorbedingung gegeben, und nur die Verifikationsbedingungen relevant.
- Sei F das annotierte Fakultätsprogramm:

```
1  // {0 ≤ n}
2  p= 1;
3  c= 1;
4  while (c <= n) /** inv {p = (c−1)! ∧ c−1 ≤ n}; */ {
5    p = p * c;
6    c = c + 1;
7    }
8  // {p = n!}
```

- Berechnung der Verifikationsbedingungen zur Nachbedingung.

Notation für Verifikationsbedingungen

```
1  // {0 ≤ n}
2  p= 1;
3  c= 1;
4  while (c <= n) /** inv {p = (c−1)! ∧ c−1 ≤ n}; */ {
5    p = p * c;
6    c = c + 1;
7    }
8  // {p = n!}
```

AWP

6	$p=((c+1)-1)!\wedge((c-1)+1)\le n$
5	$p\cdot c=((c+1)-1)!\wedge((c-1)+1)\le n$
3	$p=(1-1)!\wedge(1-1)\le n$
2	$1=(1-1)!\wedge(1-1)\le n$

VC

4	$p=(c-1)!\wedge c-1\le n\wedge\neg(c\le n)\longrightarrow$ $p\cdot c=((c+1)-1)!\wedge((c-1)+1)\le n$
4	$p=(c-1)!\wedge c-1\le n\wedge\neg(c\le n)\longrightarrow p=n!$
1	$0\le n\longrightarrow 1=(1-1)!\wedge(1-1)\le n$

Vereinfachung von Verifikationsbedingungen

Wir nehmen folgende **strukturellen Vereinfachungen** an den generierten Verifikationsbedingungen vor:

1. Auswertung konstanter arithmetischer Ausdrücke, einfache arithmetische Gesetze
   - Bsp. $(x+1)-1\rightsquigarrow x$, $1-1\rightsquigarrow 0$
2. Normalisierung der Relationen (zu $<,\le,=,\neq$) und Vereinfachung
   - Bsp: $\neg(x\le y)\rightsquigarrow x>y\rightsquigarrow y<x$
3. Konjunktionen in der Konklusion werden zu einzelnen Verifikationsbedingungen
   - Bsp: $A_1\wedge A_2\wedge A_3\longrightarrow P\wedge Q\rightsquigarrow A_1\wedge A_2\wedge A_3\longrightarrow P, A_1\wedge A_2\wedge A_3\longrightarrow Q$
4. Alle Bedingungen mit einer Prämisse *false* oder einer Konklusion *true* sind trivial erfüllt.

Weiteres Beispiel: Maximales Element

```
1  // {0 < n}
2  i= 0;
3  r= 0;
4  while (i!= n) /** inv (∀j. 0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ r < n */
5   {
6    if (a[r] < a[i]) {
7      r= i;
8      }
9    else {
10     }
11   i= i+1;
12   }
13 // {(∀j. 0 ≤ j < n ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ r < n}
```

- Sehr lange Verifikationsbedingungen (u.a. wegen Fallunterscheidung)
- Wie können wir das beheben?

Spracherweiterung: Explizite Spezifikationen

- Erweiterung der Sprache C0 um Invarianten für Schleifen und **explizite Zusicherung**

$$
\begin{array}{rll}
\textbf{Assn} & a & ::= \ldots \text{ — Zusicherungen} \\
\textbf{Stmt} & c & ::= \quad l=e \mid c_1;c_2 \mid \{\,\} \mid \textbf{if } (b)\ c_1\ \textbf{else}\ c_2 \\
& & \quad\ \mid \textbf{while } (b)\ /{**}\,\textbf{inv}\ a\ {*}/\ c \\
& & \quad\ \mid\ /{**}\{a\}\ {*}/
\end{array}
$$

- Zusicherungen haben **keine Semantik** (Kommentar!), sondern erzwingen eine neue Vorbedingung.
- Dazu vereinfachte Regel für Fallunterscheidung:

$$\mathsf{awp}(\textbf{if } (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1,\stackrel{def}{=})(b\wedge\mathsf{awp}(c_0,P))\vee(\neg b\wedge\mathsf{awp}(c_1,P))$$

Wenn $\mathsf{awp}(c_0,P)=b\wedge P_0$, $\mathsf{awp}(c_1,P)=\neg b\wedge P_0$, dann gilt

$$(b\wedge b\wedge P_0)\vee(\neg b\wedge\neg b\wedge P_0)=(b\wedge P_0)\vee(\neg b\wedge P_0)=(b\vee\neg b)\wedge P_0=P_0$$

Überblick: Approximative schwächste Vorbedingung

$$
\begin{array}{rl}
\mathsf{awp}(\{\,\},P) & \stackrel{def}{=} P \\
\mathsf{awp}(x=e,P) & \stackrel{def}{=} P[e/x] \\
\mathsf{awp}(c_1;c_2,P) & \stackrel{def}{=} \mathsf{awp}(c_1,\mathsf{awp}(c_2,P)) \\
\mathsf{awp}(\textbf{if } (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1,P) & \stackrel{def}{=} Q \quad \text{wenn} \quad \mathsf{awp}(c_0,P)=b\wedge Q,\ \mathsf{awp}(c_1,P)=\neg b\wedge Q \\
\mathsf{awp}(\textbf{if } (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1,P) & \stackrel{def}{=} (b\wedge\mathsf{awp}(c_0,P))\vee(\neg b\wedge\mathsf{awp}(c_1,P)) \\
\mathsf{awp}(/{**}\{q\}\ {*}/,P) & \stackrel{def}{=} q \\
\mathsf{awp}(\textbf{while } (b)\ /{**}\,\textbf{inv}\ i\ {*}/\ c,P) & \stackrel{def}{=} i
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\mathsf{wvc}(\{\,\},P) & \stackrel{def}{=} \emptyset \\
\mathsf{wvc}(x=e,P) & \stackrel{def}{=} \emptyset \\
\mathsf{wvc}(c_1;c_2,P) & \stackrel{def}{=} \mathsf{wvc}(c_1,\mathsf{awp}(c_2,P))\cup\mathsf{wvc}(c_2,P) \\
\mathsf{wvc}(\textbf{if } (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1,P) & \stackrel{def}{=} \mathsf{wvc}(c_0,P)\cup\mathsf{wvc}(c_1,P) \\
\mathsf{wvc}(/{**}\{q\}\ {*}/,P) & \stackrel{def}{=} \{q\longrightarrow P\} \\
\mathsf{wvc}(\textbf{while } (b)\ /{**}\,\textbf{inv}\ i\ {*}/\ c,P) & \stackrel{def}{=} \mathsf{wvc}(c,i)\cup\{i\wedge b\longrightarrow \mathsf{awp}(c,i)\}\\
& \qquad\cup\{i\wedge\neg b\longrightarrow P\}
\end{array}
$$

Maximales Element mit Zusicherung

```
1  // {0 < n}
2  i= 0;
3  r= 0;
4  while (i!= n) /** inv (∀j. 0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ r < n */
5   {
6    if (a[r] < a[i]) {
7      /** {∀j. 0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≤ a[r] ∧ 0 ≤ r < n ∧ a[r] < a[i]} */
8      r= i;
9      }
10   else {
11     /** {∀j. 0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≤ a[r] ∧ 0 ≤ r < n ∧ ¬(a[r] < a[i])} */
12     }
13   i= i+1;
14   }
15 // {(∀j. 0 ≤ j < n ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ r < n}
```

- Explizite Zusicherungen verkleinern Verifikationsbedingung

Zusammenfassung

- Die Regeln des Floyd-Hoare-Kalküls lassen sich, weitgehend schematisch, rückwärts (vom Ende her) anwenden — nur Schleifen machen Probleme.
- Wir **annotieren** daher die Invarianten an Schleifen, und können dann die schwächste Vorbedingung und Verifikationsbedingungen automatisch berechnen.
  - Dabei sind die **Verifikationsbedingungen** das interessante.
- Um die Verifikationsbedingungen zu vereinfachen führen wir **explizite Zusicherungen** in C0 ein
- Die Generierung von Verifikationsbedingungen korrespondiert zur relativen Vollständigkeit der Floyd-Hoare-Logik.
- Nächste Woche: warum eigentlich immer **rückwärts**?

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 10 vom 12.06.18: Vorwärts mit Floyd und Hoare

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Fahrplan

- Einführung
- Operationale Semantik
- Denotationale Semantik
- Äquivalenz der Operationalen und Denotationalen Semantik
- Die Floyd-Hoare-Logik
- Invarianten und die Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls
- Strukturierte Datentypen
- Modellierung und Spezifikation
- Verifikationsbedingungen
- Vorwärts mit Floyd und Hoare
- Funktionen und Prozeduren
- Referenzen
- Ausblick und Rückblick

Idee

- Hier ist ein einfaches Programm:

```
// {X = x ∧ Y = y}
z = y;
// {X = x ∧ Y = z}
y = x;
// {X = y ∧ Y = z}
x = z;
// {X = y ∧ Y = x}
```

- Wir haben gesehen:
  1. Die Verifikation erfolgt **rückwärts** (von hinten nach vorne).
  2. Die Verifikation kann **berechnet** werden.
- Muss das rückwärts sein? Warum nicht vorwärts? Was ist der Vorteil?

Nachteile der Rückwärtsberechnung

```
// {i ≠ 3}
.
. /* 400 Zeilen, die
.    i nicht verändern */
.
a[i] = 5;
// {a[3] = 7}
```

Errechnete Vorbedingung (AWP):

$$(a[3] = 7)[5/a[i]]$$

- Kann nicht vereinfacht werden, weil wir nicht wissen, ob $i \neq 3$
- AWP wird **sehr groß**.
- Das Problem wächst mit der Länge der Programme.

Der Floyd-Hoare-Kalkül Vorwärts

Vorwärtsanwendung der Regeln

- Zuweisungsregel kann nicht vorwärts angewandt werden, weil die Vorbedingung keine offene Variable ist:

$$\frac{}{\vdash \{P[e/x]\}\, x = e\, \{P\}}$$

- Die anderen Regeln passen:

$$\frac{}{\vdash \{A\}\, \{\}\, \{A\}} \qquad \frac{\vdash \{A \wedge b\}\, c_0\, \{B\} \qquad \vdash \{A \wedge \neg b\}\, c_1\, \{B\}}{\vdash \{A\}\ \textbf{if}\ (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1\, \{B\}}$$

$$\frac{\vdash \{A\}\, c_1\, \{B\} \qquad \vdash \{B\}\, c_2\, \{C\}}{\vdash \{A\}\, c_1; c_2\, \{C\}} \qquad \frac{\vdash \{A \wedge b\}\, c\, \{A\}}{\vdash \{A\}\ \textbf{while}\ (b)\ c\, \{A \wedge \neg b\}}$$

$$\frac{A' \Longrightarrow A \qquad \vdash \{A\}\, c\, \{B\} \qquad B \Longrightarrow B'}{\vdash \{A'\}\, c\, \{B'\}}$$

Zuweisungregel Vorwärts

- Alternative Zuweisungsregel (nach Floyd):

$$\frac{V \notin FV(P)}{\vdash \{P\}\, x = e\, \{\exists V.\, x = e[V/x] \wedge P[V/x]\}}$$

  - $FV(P)$ sind die **freien** Variablen in P.
- Jetzt ist die Vorbedingung offen — Regel kann vorwärts angewandt werden
- Gilt auch für die anderen Regeln.

Vorwärtsverkettung

$$\frac{V \notin FV(P)}{\vdash \{P\}\, x = e\, \{\exists V.\, x = (e[V/x]) \wedge P[V/x]\}}$$

```
// {0 ≤ x}
x = 2*y;
// {∃V1. 0 ≤ V1 ∧ x = 2 · y}
x = x+1;
// {∃V2. (∃V1. 0 ≤ V1 ∧ x = 2 · y)[V2/x] ∧ x = (x + 1)[V2/x]}
```

- **Vereinfachung** der letzten Nachbedingung:

$$\begin{aligned}
&\exists V_2.\, (\exists V_1. 0 \leq V_1 \wedge x = 2 \cdot y)[V_2/x] \wedge x = (x+1)[V_2/x] \\
\Longleftrightarrow\ &\exists V_2.\, (\exists V_1. 0 \leq V_1 \wedge V_2 = 2 \cdot y) \wedge x = V_2 + 1 \\
\Longleftrightarrow\ &\exists V_2.\, \exists V_1. 0 \leq V_1 \wedge x = V_2 + 1 \wedge V_2 = 2 \cdot y \\
\Longleftrightarrow\ &\exists V_1. 0 \leq V_1 \wedge x = 2 \cdot y + 1
\end{aligned}$$

Regeln der Vorwärtsverkettung

1. Wenn x nicht in Vorbedingung auftritt, dann $P[V/x] \equiv P$.
2. Wenn x nicht in rechter Seite e auftritt, dann $e[V/x] \equiv e$.
3. Wenn beides der Fall ist, kann der Existenzquantor wegfallen:
$$V \notin FV(P) \Longrightarrow \exists V.\, P \equiv P$$
4. Wenn x vorher zugewiesen wurde, Vereinfachung mit
$$\exists V.\, P[V] \wedge V = t \Longrightarrow P[t/V]$$

Vorwärtsverkettung

- Vorwärtsaxiom äquivalent zum Rückwärtsaxiom.
- Vorteil: Vorbedingung bleibt kleiner
- Nachteil: in der Anwendung **umständlicher**
- Vereinfachung benötigt Lemma: $\exists x.P(x) \wedge x = t \Longleftrightarrow P(t)$

Zwischenfazit: Der Floyd-Hoare-Kalkül ist symmetrisch

Es gibt zwei Zuweisungsregeln, eine für die **Rückwärtsanwendung** von Regeln, eine für die **Vorwärtsanwendung**

Vorwärtsberechnung von Verifikationsbedingungen

Stärkste Nachbedingung

- Vorwärtsberechnung von Verifikationsbedingungen: Nachbedingung
- Gegeben C0-Programm c, Prädikat P, dann ist
  - $\mathrm{sp}(P, c)$ die **stärkste Nachbedingung** Q so dass $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$
  - Prädikat Q **stärker** als Q' wenn $Q \Longrightarrow Q'$.
- Semantische Charakterisierung:

Stärkste Nachbedingung

Gegeben Zusicherung $P \in \mathbf{Assn}$ und Programm $c \in \mathbf{Stmt}$, dann

$$\models \{P\}\, c\, \{Q\} \Longleftrightarrow \mathrm{sp}(P, c) \Longrightarrow Q$$

- Wie können wir $\mathrm{sp}(P, c)$ berechnen?

Berechnung von Nachbedingungen

- Wir berechnen die **approximative** stärkste Nachbedingung.
- Viele Klauseln sind ähnlich der schwächsten Vorbedingung.
- Ausnahmen:
  - While-Schleife: andere Verifikationsbedingungen
  - If-Anweisung: Weakening eingebaut
  - **Zuweisung**: Vorwärtsregel
- Nach jeder Zuweisung Nachbedingung **vereinfachen**

Überblick: Approximative stärkste Nachbedingung

$$\begin{aligned}
\mathrm{asp}(P)\{\,\} &\stackrel{def}{=} P \\
\mathrm{asp}(P)x = e &\stackrel{def}{=} \exists V.\, P[V/x] \wedge x = (e[V/x]) \\
\mathrm{asp}(P)c_1; c_2 &\stackrel{def}{=} \mathrm{asp}(\mathrm{asp}(c_1)P)c_2 \\
\mathrm{asp}(P)\textbf{if}\ (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1 &\stackrel{def}{=} \mathrm{asp}(b \wedge P)c_0 \vee \mathrm{asp}(\neg b \wedge P)c_1 \\
\mathrm{asp}(P)/{**}\{q\}\ {*}/ &\stackrel{def}{=} q \\
\mathrm{asp}(P)\textbf{while}\ (b)\ /{**}\textbf{inv}\ i\ {*}/\ c &\stackrel{def}{=} i \wedge \neg b \\
\\
\mathrm{svc}(P)\{\,\} &\stackrel{def}{=} \emptyset \\
\mathrm{svc}(P)x = e &\stackrel{def}{=} \emptyset \\
\mathrm{svc}(P)c_1; c_2 &\stackrel{def}{=} \mathrm{svc}(P)c_1 \cup \mathrm{svc}(\mathrm{asp}(c_1)P)c_2 \\
\mathrm{svc}(P)\textbf{if}\ (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1 &\stackrel{def}{=} \mathrm{svc}(P \wedge b)c_0 \cup \mathrm{svc}(P \wedge \neg b)c_1 \\
\mathrm{svc}(P)/{**}\{q\}\ {*}/ &\stackrel{def}{=} \{P \longrightarrow q\} \\
\mathrm{svc}(P)\textbf{while}\ (b)\ /{**}\textbf{inv}\ i\ {*}/\ c &\stackrel{def}{=} \mathrm{svc}(i \wedge b)c \cup \{P \longrightarrow i\} \\
&\qquad \cup \{\mathrm{asp}(i \wedge b)c \longrightarrow i\} \\
\mathit{svc}(\{P\}\, c\, \{Q\}) &\stackrel{def}{=} \{\mathrm{asp}(P)c \longrightarrow Q\} \cup \mathrm{svc}(P)c
\end{aligned}$$

Beispiel: Fakultät

```
1  // {0 ≤ n}
2  p= 1;
3  c= 1;
4  while (c <= n) /** inv {p = (c−1)! ∧ c−1 ≤ n}; */ {
5    p = p * c;
6    c = c + 1;
7    }
8  // {p = n!}
```


Fakultät: Stärkste Vorbedingung

Notation: asp_x = Stärkste Nachbedingung **nach** Zeile x.

$$\begin{aligned}
asp_2 = \ & \exists V.\, 0 \le n[V/p] \wedge p = (1[V/p]) \\
& \rightsquigarrow 0 \le n \wedge p = 1 \\
asp_3 = \ & \exists V.\, (0 \le n \wedge p = 1)[V/c] \wedge c = (1[V/c]) \\
& \rightsquigarrow 0 \le n \wedge p = 1 \wedge c = 1 \\
asp_4 = \ & \neg(c \le n) \wedge p = (c-1)! \wedge c - 1 \le n \\
asp_5 = \ & \exists V_1.\, (p = (c-1)! \wedge (c-1) \le n \wedge c \le n)[V_1/p] \\
& \quad \wedge p = (p \cdot c)[V_1/p] \\
& \rightsquigarrow \exists V_1.\, (V_1 = (c-1)! \wedge (c-1) \le n \wedge c \le n) \wedge p = (V_1 \cdot c) \\
& \rightsquigarrow c - 1 \le n \wedge c \le n \wedge p = (c-1)! \cdot c \\
asp_6 = \ & \exists V_2.\, (c - 1 \le n \wedge c \le n \wedge p = (c-1)! \cdot c)[V_2/c] \\
& \quad \wedge c = (c+1)[V_2/c] \\
& \rightsquigarrow \exists V_2.\, (V_2 - 1 \le n \wedge V_2 \le n \wedge p = (V_2 - 1)! \cdot V_2) \wedge c = (V_2 + 1) \\
& \rightsquigarrow c - 2 \le n \wedge c - 1 \le n \wedge p = (c-2)! \cdot (c-1)
\end{aligned}$$

Fakultät: Verifikationsbedingungen

Notation: vc_x = in Zeile x generierte Verifikationsbedingung

$$\begin{aligned} vc_4 = \; & \{asp_3 \longrightarrow p = (c-1)! \wedge c - 1 \leq n, \\ & \; asp_6 \longrightarrow p = (c-1)! \wedge c - 1 \leq n\} \\ vc_8 = \; & \; asp_4 \longrightarrow p = n! \end{aligned}$$

Vereinfachung: $vc_4 \Longleftrightarrow vc_{4.1} \wedge vc_{4.2} \wedge vc_{4.3} \wedge vc_{4.4}$

$$\begin{aligned} vc_{4.1} &= 0 \leq n \wedge p = 1 \wedge c = 1 \longrightarrow p = (c-1)! \\ &= 0 \leq n \longrightarrow 1 = (1-1)! \\ vc_{4.2} &= 0 \leq n \wedge p = 1 \wedge c = 1 \longrightarrow c - 1 \leq n \\ &= 0 \leq n \longrightarrow 0 \leq n \\ vc_{4.3} &= c - 2 \leq n \wedge c - 1 \leq n \wedge p = (c-2)! \cdot (c-1) \longrightarrow p = (c-1)! \\ &= c - 1 \leq n \wedge p = (c-2)! \cdot (c-1) \longrightarrow p = (c-1)! \\ vc_{4.4} &= c - 2 \leq n \wedge c - 1 \leq n \wedge p = (c-2)! \cdot (c-1) \longrightarrow c - 1 \leq n \\ &= c - 1 \leq n \longrightarrow c - 1 \leq n \\ vc_8 &= n \leq c - 1 \wedge c - 1 \leq n \wedge p = (c-1)! \longrightarrow p = n! \end{aligned}$$

Beispiel: Suche nach dem Maximalen Element

```
1  // {0 < n}
2  i= 0;
3  r= 0;
4  while (i!= n) /** inv (∀j.0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ r <
   n */ {
5    if (a[r] < a[i]) {
6      r= i;
7      }
8    else {
9      }
10   i= i+1;
11   }
12 // {(∀j.0 ≤ j < n ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ r < n}
```

- Problem: wir müssen u.a. zeigen

$$\begin{aligned} &(\exists V_1.(\forall j.0 \leq j < i-1 \longrightarrow a[j] \leq a[V_1]) \wedge \\ &\quad i - 1 \neq n \wedge a[V_1] < a[i-1] \wedge r = i-1) \longrightarrow 0 \leq r < n \end{aligned}$$

Deshalb: Invariante **verstärken**!

Beispiel: Suche nach dem Maximalen Element

Verstärkte Invariante (und Schleifenbedingung):

```
1  // {0 < n}
2  i= 0;
3  r= 0;
4  while (i< n) /** inv  (∀j.0 ≤ j < i ⟶ a[j] ≤ a[r])  */
                         ∧ 0 ≤ i ≤ n ∧ 0 ≤ r < n
5  {
6    if (a[r] < a[i]) {
7      r= i;
8      }
9    else {
10     }
11   i= i+1;
12   }
13 // {(∀j.0 ≤ j < n ⟶ a[j] ≤ a[r]) ∧ 0 ≤ r < n}
```

$$\begin{aligned} &(\exists V_1.(\forall j.0 \leq j < i-1 \longrightarrow a[j] \leq a[V_1]) \wedge \\ &\quad 0 \leq i-1 < n \wedge a[V_1] < a[i-1] \wedge r = i-1) \longrightarrow 0 \leq r < n \end{aligned}$$

Läuft!

Zusammenfassung

- Die Regeln des Floyd-Hoare-Kalküls sind **symmetrisch**: die Zuweisungsregel gibt es"rückwärts" und "vorwärts".
- Dual zu Beweis und Verifikationsbedingung rückwärts gibt es Regel und Verifkationsbedingungen vorwärts. automatisch prüfen.
- Kern der Vorwärtsberechnung ist die Zuweisungsregel nach Floyd.
- Vorwärtsberechnung erzeugt kleinere Terme, ist aber umständlicher zu handhaben.
- Rückwärtsberechnung ist einfacher zu handhaben, erzeugt aber (tendenziell sehr) große Terme.

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 11 vom 19.06.18: Funktionen und Prozeduren

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Fahrplan

Funktionen & Prozeduren

- **Funktionen** sind das zentrale Modularisierungskonzept von C
  - Kleinste Einheit
  - NB. Prozeduren sind nur Funktionen vom Typ **void**
- In objektorientierten Sprachen: Methoden
  - Funktionen mit (implizitem) erstem Parameter **this**
- Wie behandeln wir Funktionen?

Modellierung und Spezifikation von Funktionen

Wir brauchen:

(1) Von Anweisungen zu Funktionen: Deklarationen und Parameter

(2) Semantik von Funktionsdefinition und Funktionsaufruf

(3) Spezifikation von Funktionen

(4) Beweisregeln für Funktionsdefinition und Funktionsaufruf

Von Anweisungen zu Funktionen

- Erweiterung unserer Kernsprache um Funktionsdefinition und Deklarationen:

$$\begin{aligned}
\textbf{FunDef} &::= \textbf{FunHeader}\ \textbf{FunSpec}^+\ \textbf{Blk}\\
\textbf{FunHeader} &::= \textbf{Type}\ \textbf{Idt}(\textbf{Decl}^*)\\
\textbf{Decl} &::= \textbf{Type}\ \textbf{Idt}\\
\textbf{Blk} &::= \{\textbf{Decl}^*\ \textbf{Stmt}\}\\
\textbf{Type} &::= \textbf{char} \mid \textbf{int} \mid \textbf{Struct} \mid \textbf{Array}\\
\textbf{Struct} &::= \textbf{struct}\ \textbf{Idt}^?\ \{\textbf{Decl}^+\}\\
\textbf{Array} &::= \textbf{Type}\ \textbf{Idt}[\textbf{Aexp}]
\end{aligned}$$

- Abstrakte Syntax (konkrete Syntax mischt **Type** und **Idt**, Kommata bei Argumenten, ...)
- Größe von Feldern: **konstanter** Ausdruck
- **FunSpec** später

Funktionsaufrufe und Rückgaben

Neue Ausdrücke und Anweisungen:

- Funktionsaufrufe
- Return-Anweisung

$$\begin{aligned}
\textbf{Aexp}\ a ::=\ & \textbf{Z} \mid \textbf{C} \mid \textbf{Lexp} \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1/a_2\\
& \mid \textbf{Idt}(\textbf{Exp}^*)\\
\textbf{Bexp}\ b ::= & \ \textbf{1} \mid \textbf{0} \mid a_1 == a_2 \mid a_1 < a_2 \mid !\, b \mid b_1\ \&\&\ b_2 \mid b_1 \mid\mid b_2\\
\textbf{Exp}\ e :=\ & \textbf{Aexp} \mid \textbf{Bexp}\\
\textbf{Stmt}\ c ::=\ & l = e \mid c_1; c_2 \mid \{\,\} \mid \textbf{if}\ (b)\ c_1\ \textbf{else}\ c_2\\
& \mid \textbf{while}\ (b)\ /{**}\,\textbf{inv}\ a\,{*}/\ c \mid /{**}\{a\}\,{*}/\\
& \mid \textbf{Idt}(a^*)\\
& \mid \textbf{return}\ a^?
\end{aligned}$$

Rückgabewerte

- Problem: **return** bricht sequentiellen Kontrollfluss:

```
if (x == 0) return -1;
y = y / x;      // Wird nicht immer erreicht
```

- Lösung 1: verbieten!
  - MISRA-C (Guidelines for the use of the C language in critical systems):

> Rule 14.7 (required)
> A function shall have a single point of exit at the end of the function.

  - Nicht immer möglich, unübersichtlicher Code...
- Lösung 2: Erweiterung der Semantik von $\Sigma \rightharpoonup \Sigma$ zu $\Sigma \rightharpoonup (\Sigma + \Sigma \times \mathbf{V})$

Erweiterte Semantik

- Denotat einer Anweisung: $\Sigma \rightharpoonup (\Sigma + \Sigma \times \mathbf{V})$ $\Sigma \rightharpoonup (\Sigma + \Sigma \times \mathbf{V}_U)$
- Abbildung von Ausgangszustand Σ auf:
  - Sequentieller Folgezustand, oder
  - Rückgabewert und Rückgabezustand
- Was ist mit **void**?
  - Erweiterte Werte: $\mathbf{V}_U \stackrel{def}{=} \mathbf{V} + \{*\}$
- Komposition zweier Anweisungen $f, g : \Sigma \rightharpoonup (\Sigma + \Sigma \times \mathbf{V}_U)$:

$$g \circ_S f(\sigma) \stackrel{def}{=} \begin{cases} g(\sigma') & f(\sigma) = \sigma' \\ (\sigma', v) & f(\sigma) = (\sigma', v) \end{cases}$$

Semantik von Anweisungen

$$\mathcal{C}[\![.]\!] : \mathbf{Stmt} \to \Sigma \rightharpoonup (\Sigma + \Sigma \times \mathbf{V}_U)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}[\![x = e]\!] &= \{(\sigma, \sigma[a/x]) \mid (\sigma, a) \in \mathcal{A}[\![e]\!]\} \\
\mathcal{C}[\![c_1; c_2]\!] &= \mathcal{C}[\![c_1]\!] \circ_S \mathcal{C}[\![c_2]\!] \quad \text{Komposition wie oben} \\
\mathcal{C}[\![\{\,\}]\!] &= \mathbf{Id}_\Sigma \qquad \mathbf{Id}_\Sigma := \{(\sigma, \sigma) | \sigma \in \Sigma\} \\
\mathcal{C}[\![\textbf{if } (b)\ c_0\ \textbf{else}\ c_1]\!] &= \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, \mathit{true}) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c_0]\!]\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, \mathit{false}) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma') \in \mathcal{C}[\![c_1]\!]\} \\
&\quad \text{mit } \sigma' \in \Sigma \cup (\Sigma \times \mathbf{V}_U) \\
\mathcal{C}[\![\textbf{return } e]\!] &= \{(\sigma, (\sigma, a)) \mid (\sigma, a) \in \mathcal{A}[\![e]\!]\} \\
\mathcal{C}[\![\textbf{return}]\!] &= \{(\sigma, (\sigma, *))\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}[\![\textbf{while } (b)\ c]\!] &= \mathit{fix}(\Gamma) \\
\Gamma(\psi) &\stackrel{def}{=} \{(\sigma, \sigma') \mid (\sigma, \mathit{true}) \in \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge (\sigma, \sigma') \in \psi \circ_S \mathcal{C}[\![c]\!]\} \\
&\quad \cup \{(\sigma, \sigma) \mid (\sigma, \mathit{false}) \in \mathcal{B}[\![b]\!]\}
\end{aligned}$$

Semantik von Funktionsdefinitionen

$$\mathcal{D}_{fd}[\![.]\!] : \mathbf{FunDef} \to \mathbf{V}^n \rightharpoonup \Sigma \rightharpoonup \Sigma \times \mathbf{V}_U$$

Das Denotat einer Funktion ist eine Anweisung, die über den tatsächlichen Werten für die Funktionsargumente parametriert ist.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_{fd}[\![f(t_1\ p_1, t_2\ p_2, \ldots, t_n\ p_n)\ \mathit{blk}]\!] = \\
&\quad \lambda v_1, \ldots, v_n. \{(\sigma, (\sigma', v)) \mid \\
&\qquad (\sigma, (\sigma', v)) \in \mathcal{D}_{blk}[\![\mathit{blk}]\!] \circ_S \{(\sigma, \sigma[v_1/p_1, \ldots, v_n/p_n])\}\}
\end{aligned}$$

- Die Funktionsargumente sind lokale Deklarationen, die mit den Aufrufwerten initialisiert werden.
  - Insbesondere können sie lokal in der Funktion verändert werden.
- Von $\mathcal{D}_{blk}[\![\mathit{blk}]\!]$ sind nur **Rückgabezustände** interessant.
  - Kein „fall-through“

Semantik von Blöcken und Deklarationen

$$\mathcal{D}_{blk}[\![.]\!] : \mathbf{Blk} \rightharpoonup \Sigma \rightharpoonup (\Sigma + \Sigma \times \mathbf{V}_U)$$
$$\mathcal{D}_{d}[\![.]\!] : \mathbf{Decl} \rightharpoonup \Sigma \rightharpoonup (\Sigma + \Sigma \times \mathbf{V}_U)$$

Blöcke bestehen aus Deklarationen und einer Anweisung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{blk}[\![\mathit{decls}\ \mathit{stmts}]\!] &= \mathcal{C}[\![\mathit{stmts}]\!] \circ_S \mathcal{D}_d[\![\mathit{decls}]\!] \\
\mathcal{D}_d[\![t\ i]\!] &= \{(\sigma, \sigma[\perp/i])\}
\end{aligned}$$

- Verallgemeinerung auf Sequenz von Deklarationen

Funktionsaufrufe

- Aufruf einer Funktion: $f(t_1, \ldots, t_n)$:
  - Auswertung der Argumente $t_1, \ldots, t_n$
  - Einsetzen in die Semantik $\mathcal{D}_{fd}[\![f]\!]$
- Call by name, call by value, call by reference...?
  - C kennt nur call by value (C-Standard 99, §6.9.1. (10))
  - Was ist mit **Seiteneffekten?** Wie können wir Werte **ändern**?
    - Erst mal gar nicht...

Funktionsaufrufe

- Um eine Funktion f aufzurufen, müssen wir (statisch!) die Semantik der **Definition** von f dem Bezeichner f zuordnen.
- Deshalb brauchen wir eine **Umgebung** (Environment):

$$\begin{aligned}
\mathbf{Env} &= \mathit{Id} \rightharpoonup [\![\mathbf{FunDef}]\!] \\
&= \mathit{Id} \rightharpoonup \mathbf{V}^N \rightharpoonup \Sigma \rightharpoonup (\Sigma \times \mathbf{V}_u)
\end{aligned}$$

- Das Environment ist **zusätzlicher Parameter** für alle Definitionen

Semantik von Funktionsaufrufen

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]\Gamma &= \{(\sigma, v) \mid \exists \sigma', v.\, (\sigma, (\sigma', v)) \in \Gamma(f)(v_1, \ldots, v_n) \\
&\qquad \wedge (\sigma, v_i) \in \mathcal{A}[\![t_i]\!]\Gamma\} \\
\mathcal{C}[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]\Gamma &= \{(\sigma, \sigma') \mid \exists \sigma'.\, (\sigma, (\sigma', *)) \in \Gamma(f)(v_1, \ldots, v_n) \\
&\qquad \wedge (\sigma, v_i) \in \mathcal{A}[\![t_i]\!]\Gamma\} \\
\mathcal{C}[\![x = f(t_1, \ldots, t_n)]\!]\Gamma &= \{(\sigma, \sigma'[v/x]) \mid \exists \sigma', v.\, (\sigma, (\sigma', v)) \in \Gamma(f)(v_1, \ldots, v_n) \\
&\qquad \wedge (\sigma, v_i) \in \mathcal{A}[\![t_i]\!]\Gamma\}
\end{aligned}$$

- Aufruf einer nicht-definierten Funktion f oder mit falscher Anzahl n von Parametern ist nicht definiert
  - Muss durch **statische Analyse** verhindert werden
- Aufruf von Funktion $\mathcal{A}[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]$ ignoriert Endzustand
- Aufruf von Prozedur $\mathcal{C}[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]$ ignoriert Rückgabewert
- Besser: Kombination mit Zuweisung

Spezifikation von Funktionen

- Wir **spezifizieren** Funktionen durch **Vor-** und **Nachbedingungen**
  - Ähnlich den Hoare-Tripeln, aber vereinfachte Syntax
  - **Behavioural specification**, angelehnt an JML, OCL, ACSL (Frama-C)
- Syntaktisch:

FunSpec ::= /** **pre** **Bexp** **post** **Bexp** */

Vorbedingung	**pre** sp;	$\Sigma \to \mathbb{B}$
Nachbedingung	**post** sp;	$\Sigma \times (\Sigma \times \mathbf{V}_U) \to \mathbb{B}$
	\old(e)	Wert von e im **Vorzustand**
	\result	**Rückgabewert** der Funktion

Beispiel: Fakultät

```
int fac(int n)
/** pre 0 ≤ n;
    post \result == n!;
 */
{
 int p;
 int c;

 p= 1;
 c= 1;
 while (c<= n) /** inv p == (c − 1)! ∧ c ≤ n + 1 ∧ 0 < c */ {
    p= p*c;
    c= c+1;
    }
 return p;
}
```

Beispiel: Suche

```
int findmax(int a[], int a_len)
  /** pre  \array(a, a_len); */
  /** post ∀i. 0 ≤ i < a_len ⟶ a[i] ≤ \result; */
{
  int x; int j;

  x= INT_MIN; j= 0;
  while (j< a_len)
    /** inv (∀i. 0 ≤ i < j ⟶ a[i] ≤ x) ∧ j ≤ a_len; */
    {
    if (a[j]> x) x= a[j];
    j= j+1;
    }
  return x;
}
```


Semantik von Spezifikationen

- Vorbedingung: Auswertung als $\mathcal{B}[\![sp]\!]\,\Gamma$ über dem Vorzustand
- Nachbedingung: Erweiterung von $\mathcal{B}[\![.]\!]$ und $\mathcal{A}[\![.]\!]$
  - Ausdrücke können in Vor- oder Nachzustand ausgewertet werden.
  - \resultkann nicht in Funktionen vom Typ **void** auftreten.

$$\mathcal{B}_{sp}[\![.]\!] : \mathbf{Env} \to \mathbf{Bexp} \rightharpoonup (\Sigma \times (\Sigma \times \mathbf{V}_U)) \to \mathbb{B}$$
$$\mathcal{A}_{sp}[\![.]\!] : \mathbf{Env} \to \mathbf{Aexp} \rightharpoonup (\Sigma \times (\Sigma \times \mathbf{V}_U)) \to \mathbf{V}$$
$$\mathcal{B}_{sp}[\![!b]\!]\,\Gamma = \{((\sigma,(\sigma',v)),1) \mid ((\sigma,(\sigma',v)),\mathit{false}) \in \mathcal{B}_{sp}[\![b]\!]\Gamma\} \cup \{((\sigma,(\sigma',v)),0) \mid ((\sigma,(\sigma',v)),\mathit{true}) \in \mathcal{B}_{sp}[\![b]\!]\Gamma\}$$
$$\ldots$$
$$\mathcal{B}_{sp}[\![\backslash\mathbf{old}(e)]\!]\,\Gamma = \{((\sigma,(\sigma',v)),b) \mid (\sigma,b) \in \mathcal{B}[\![e]\!]\,\Gamma\}$$
$$\mathcal{A}_{sp}[\![\backslash\mathbf{old}(e)]\!]\,\Gamma = \{((\sigma,(\sigma',v)),a) \mid (\sigma,a) \in \mathcal{A}[\![e]\!]\,\Gamma\}$$
$$\mathcal{A}_{sp}[\![\backslash\mathbf{result}]\!]\,\Gamma = \{((\sigma,(\sigma,v)),v)\}$$

$$\mathcal{B}_{sp}[\![\mathbf{pre}\ p\ \mathbf{post}\ q]\!]\,\Gamma = \{(\sigma,(\sigma',v)) \mid \sigma \in \mathcal{B}[\![p]\!]\,\Gamma \wedge (\sigma',(\sigma,v)) \in \mathcal{B}_{sp}[\![p]\!]\,\Gamma\}$$

Gültigkeit von Spezifikationen

- Die Semantik von Spezifikationen erlaubt uns die Definition der **semantischen Gültigkeit**.

$$\mathbf{pre}\ p\ \mathbf{post}\ q \models \mathit{FunDef}$$
$$\iff \forall v_1,\ldots,v_n.\, \mathcal{D}_{fd}[\![\mathit{FunDef}]\!]\,\Gamma \in \mathcal{B}_{sp}[\![\mathbf{pre}\ p\ \mathbf{post}\ q]\!]\,\Gamma$$

  - Γ enthält globale Definitionen, insbesondere andere Funktionen.
- Wie passt das zu $\models \{P\}\,c\,\{Q\}$ für Hoare-Tripel?
- Wie **beweisen** wir das? **Erweiterung** des Hoare-Kalküls

Erweiterung des Floyd-Hoare-Kalküls

$$\mathcal{C}[\![.]\!] : \mathbf{Stmt} \to \Sigma \rightharpoonup (\Sigma + \Sigma \times \mathbf{V}_U)$$

Hoare-Tripel: zusätzliche Spezifikation für **Rückgabewert**.

Partielle Korrektheit ($\models \{P\}\,c\,\{Q|Q_R\}$)

c ist **partiell korrekt**, wenn für alle Zustände σ, die P erfüllen:

- die Ausführung von c mit σ in σ' regulär terminiert, so dass σ' die Spezifikation Q erfüllt,
- oder die Ausführung von c in σ' mit dem Rückgabewert v terminiert, so dass (σ', v) die Rückgabespezifikation Q_R erfüllt.

$$\models \{P\}\,c\,\{Q|Q_R\} \iff$$
$$\forall\sigma.\,\sigma \models \mathcal{B}[\![P]\!]\Gamma \implies \exists\sigma'.\,(\sigma,\sigma') \in \mathcal{C}[\![c]\!]\Gamma \wedge \sigma' \models \mathcal{B}[\![Q]\!]\Gamma$$
$$\vee$$
$$\exists\sigma', v.\,(\sigma,(\sigma',v)) \in \mathcal{C}[\![c]\!]\Gamma \wedge (\sigma',v) \models \mathcal{B}[\![Q_R]\!]\Gamma$$

Kontext

- Wir benötigen ferner einen **Kontext** Γ, der Funktionsbezeichnern ihre **Spezifikation** (Vor/Nachbedingung) zuordnet.
- $\Gamma(f) = \forall x_1,\ldots,x_n.\,(P,Q)$, für Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ mit Vorbedingung P und Nachbedingung Q.
- Notation: $\Gamma \models \{P\}\,c\,\{Q|Q_R\}$ und $\Gamma \vdash \{P\}\,c\,\{Q|Q_R\}$
- Korrektheit gilt immer nur im **Kontext**, dadurch kann jede Funktion separat verifiziert werden (**Modularität**)

Erweiterung des Floyd-Hoare-Kalküls: return

$$\frac{}{\Gamma \vdash \{Q\}\ \mathbf{return}\ \{P|Q\}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \{Q[e/\backslash\mathbf{result}]\}\ \mathbf{return}\ e\ \{P|Q\}}$$

- Bei **return** wird die Rückgabespezifikation Q zur Vorbedingung, die reguläre Nachfolgespezifikation wird ignoriert, da die Ausführung von **return** kein Nachfolgezustand hat.
- **return** ohne Argument darf nur bei einer Nachbedingung Q auftreten, die kein \result enthält.
- Bei **return** mit Argument ersetzt der Rückgabewert den \result in der Rückgabespezifikation.

Erweiterung des Floyd-Hoare-Kalküls: Spezifikation

$$\frac{P \implies P'[y_i/\backslash\mathbf{old}(y_i)] \quad \Gamma[f \mapsto \forall x_1,\ldots,x_n.\,(P,Q)] \vdash \{P'\}\,blk\,\{Q|Q\}}{\Gamma \vdash f(x_1,\ldots,x_n)/{*}{*}\ \mathrm{pre}\ P\ \mathrm{post}\ Q\ {*}/\ \{ds\ blk\}}$$

- Die Parameter x_i werden per Konvention nur als x_i referenziert, aber es ist immer der Wert im **Vorzustand** gemeint (eigentlich $\backslash\mathbf{old}(x_i)$).
- Variablen unterhalb von $\backslash\mathbf{old}(y)$ werden bei der Substitution (Zuweisungsregel) **nicht ersetzt!**
- $\backslash\mathbf{old}(y)$ wird beim Weakening von der Vorbedingung P ersetzt

Erweiterung des Floyd-Hoare-Kalküls: Aufruf

$$\frac{\Gamma(f) = \forall x_1,\ldots,x_n.\,(P,Q), f \text{ vom Typ } \mathbf{void}}{\Gamma \vdash \{Y_j = y_j\ \&\&\ P[t_i/x_i]\}\ f(t_1,\ldots,t_n)\ \{Q[t_i/x_i][Y_j/\backslash\mathbf{old}(y_j)]|Q_R\}}$$

$$\frac{\Gamma(f) = \forall x_1,\ldots,x_n.\,(P,Q)}{\Gamma \vdash \{Y_j = y_j\ \&\&\ P[t_i/x_i]\}\ x = f(t_1,\ldots,t_n)\ \{Q[t_i/x_i][Y_j/\backslash\mathbf{old}(y_j)][x/\backslash\mathbf{result}]|Q_R\}}$$

- Γ muss f mit der Vor-/Nachbedingung P, Q enthalten
- In P und Q werden Parameter x_i durch Argumente t_i ersetzt.
- $y_1,\ldots,y_m$ sind die als $\backslash\mathbf{old}(y_j)$ in Q auftretenden Variablen
- $Y_1,\ldots,Y_m$ dürfen nicht in P oder Q enthalten sein
- Im ersten Fall (Aufruf als Prozedur) enthält Q kein \result

Erweiterter Floyd-Hoare-Kalkül I

$$\frac{}{\Gamma \vdash \{P\}\,\{\}\,\{P|Q_R\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{P\}\,c_1\,\{R|Q_R\} \quad \Gamma \vdash \{R\}\,c_2\,\{Q|Q_R\}}{\Gamma \vdash \{P\}\,c_1; c_2\,\{Q|Q_R\}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \{Q[e/x]\}\,x = e\,\{Q|Q_R\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{P \wedge b\}\,c\,\{P|Q_R\}}{\Gamma \vdash \{P\}\ \textbf{while}\ (b)\ c\,\{P \wedge \neg b|Q_R\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{P \wedge b\}\,c_1\,\{Q|Q_R\} \quad \Gamma \vdash \{P \wedge \neg b\}\,c_2\,\{Q|Q_R\}}{\Gamma \vdash \{P\}\ \textbf{if}\ (b)\ c_1\ \textbf{else}\ c_2\,\{Q|Q_R\}}$$

$$\frac{P \longrightarrow P' \quad \Gamma \vdash \{P'\}\,c\,\{Q'|R'\} \quad Q' \longrightarrow Q \quad R' \longrightarrow R}{\Gamma \vdash \{P\}\,c\,\{Q|R\}}$$

Erweiterter Floyd-Hoare-Kalkül II

$$\frac{}{\Gamma \vdash \{Q\}\ \textbf{return}\,\{P|Q\}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \{Q[e/\backslash\textbf{result}]\}\ \textbf{return}\ e\,\{P|Q\}}$$

$$\frac{\Gamma[f \mapsto (P,Q)] \vdash \{X_i = x_i \wedge Y_j = y_j \wedge P\}\ blk\ \{Q[X_i/x_i][y_j/\backslash\textbf{old}(y_j)]|Q[X_i/x_i][y_j/\backslash\textbf{old}(y_j)]\}}{\Gamma \vdash f(x_1,\ldots,x_n)/{**}\ \text{pre}\ P\ \text{post}\ Q\ {**}/\ \{ds\ blk\}}$$

$$\frac{\Gamma(f) = \forall x_1,\ldots,x_n.\,(P,Q), f\ \text{vom Typ}\ \textbf{void} \quad \Gamma \vdash \{Y_j = y_j \wedge P[t_i/x_i]\}\ f(t_1,\ldots,t_n)\ \{Q[t_i/x_i][Y_j/\backslash\textbf{old}(y_j)]|Q_R\}}{\Gamma(f) = \forall x_1,\ldots,x_n.\,(P,Q) \vdash \{Y_j = y_j \wedge P[t_i/x_i]\}\ x = f(t_1,\ldots,t_n)\ \{Q[t_i/x_i][Y_j/\backslash\textbf{old}(y_j)][x/\backslash\textbf{result}]|Q_R\}}$$

Beispiel: die Fakultätsfunktion, rekursiv

```
int fac(int x)
/** pre 0 ≤ x;
    post \result = x! */
{
 int r = 0;

 if (x == 0) { return 1; }
 r = fac(x- 1);
 return r* x;
}
```


Beobachtungen

- Der Aufruf einer Funktion **ersetzt** die momentane Nachbedingung — das ist ein Problem
- Wir brauchen keine Invariante mehr — ist durch die Nachbedingung gegeben
- Rekursion benötigt keine Extrabehandlung
  - Termination von rekursiven Funktionen wird extra gezeigt

Zusammenfassung

- Funktionen sind **zentrales Modularisierungskonzept**
- Wir müssen Funktionen **modular** verifizieren können
- Erweiterung der **Semantik:**
  - Semantik von Deklarationen und Parameter — straightforward
  - Semantik von **Rückgabewerten** — Erweiterung der Semantik
  - **Funktionsaufrufe** — Environment, um Funktionsbezeichnern eine Semantik zu geben
- Erweiterung der **Spezifikationen:**
  - Spezifikation von Funktionen: **Vor-/Nachzustand** statt logischer Variablen
- Erweiterung des Hoare-Kalküls:
  - Environment, um andere Funktionen zu nutzen
  - Gesonderte Nachbedingung für Rückgabewert/Endzustand

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 12 vom 26.06.18: Referenzen und Speichermodelle

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Fahrplan

Motivation

- Warum Referenzen?
  - Nötig für *call by reference*
  - Funktion können sonst nur **globale** Seiteneffekte haben
  - Effizienz
- Kurze Begriffsklärung:
  - Referenzen: getypt, eingeschränkte Arithmetik
  - Zeiger: ungetypt, Zeigerarithmetik

Refenzen in C

- Pointer in C ("pointer type"):
  - Schwach getypt (**void** $*$ kompatibel mit allen Zeigertypen, Typumwandlung)
  - Eingeschränkte Zeigerarithmetik (Addition, Subtraktion)
  - Felder werden durch Zeigerarithmetik implementiert
- Pointer sind *first-class-values*
- C-Standard läßt das Speichermodell relativ offen
  - Repräsentation von Objekten

Referenzen in anderen Sprachen

- Java:
  - Alles ist eine Referenz
  - Schwach getypt (Subtyping und Typumwandlung)
- Haskell, SML, OCaml:
  - Stark getypt (typsicher)
- Scriptsprachen (Python, Ruby):
  - Ähnlich Java

Ausdrücke

- Neue Operatoren: Addressoperator ($\&a$) und Derefenzierung ($*l$)

$$
\begin{array}{rl}
\textbf{Lexp} & l ::= \textbf{Idt} \mid l[a] \mid l.\textbf{Idt} \mid *a \\
\textbf{Aexp} & a ::= \textbf{Z} \mid \textbf{C} \mid \textbf{Lexp} \mid \&l \\
 & \quad \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1 / a_2 \mid \textbf{Idt}(\textbf{Exp}^*) \\
\textbf{Bexp} & b ::= \ldots \\
\textbf{Exp} & e := \textbf{Aexp} \mid \textbf{Bexp} \\
\textbf{Stmt} & c ::= \ldots \\
\textbf{Type} & t ::= \textbf{char} \mid \textbf{int} \mid *t \mid \textbf{struct}\ \textbf{Idt}^?\ \{\textbf{Decl}^+\} \mid t\ \textbf{Idt}[a]
\end{array}
$$

Das Problem mit Zeigern

- Bisheriges Speichermodell: $\Sigma = \textbf{Loc} \rightharpoonup \textbf{V}$
- **Aliasing:**
  Verschiedene Bezeichner (**Lexp**) für die gleiche Lokation $l \in \textbf{Loc}$

```
int a;
int *p;

p= &a;
a= 0;
// {a = 0}
*p= 7;
// {a = 7}
```

- Wert von a ändert sich **ohne dass a erwähnt** wird.
- Großes Problem für Semantik und Hoare-Kalkül.

Erweiterung des Zustandmodells

- Bisheriger Zustand $\Sigma \stackrel{def}{=} \textbf{Loc} \rightharpoonup \textbf{V}$ mit
  - **Locations:** $\textbf{Loc} ::= \textbf{Idt} \mid \textbf{Loc}[\mathbb{Z}] \mid \textbf{Loc}.\textbf{Idt}$
  - Werte: $\textbf{V} = \mathbb{Z}$
- Ansatz reicht nicht mehr:

(i) Werte müssen auch Locations sein: $\textbf{V} \stackrel{def}{=} \mathbb{Z} + \textbf{Loc}$

(ii) **Idt**als Location nicht ausreichend für Referenzen und Funktionen

- Man kann den Zustand **modellbasiert** (wie bisher) oder **axiomatisch** beschreiben.

Axiomatisches Zustandsmodell

- Der Zustand ist ein abstrakter Datentyp Σ (und **Loc**) mit zwei Operationen und folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathit{read} &: \Sigma \to \mathbf{Loc} \rightharpoonup \mathbf{V} \\ \mathit{upd} &: \Sigma \to \mathbf{Loc} \to \mathbf{V} \rightharpoonup \Sigma \\ \mathbf{V} &\stackrel{\mathit{def}}{=} \mathbb{Z} + \mathbf{Loc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathit{read}(\mathit{upd}(\sigma, l, v), l) &= v \\ l \neq m \implies \mathit{read}(\mathit{upd}(\sigma, l, v), m) &= \mathit{read}(\sigma, m) \\ \mathit{upd}(\mathit{upd}(\sigma, l, v), l, w) &= \mathit{upd}(\sigma, l, w) \\ l \neq m \implies \mathit{upd}(\mathit{upd}(\sigma, l, v), m, w) &= \mathit{upd}(\mathit{upd}(\sigma, m, w), l, v) \end{aligned}$$

- Diese Gleichungen sind **vollständig.**

Axiomatisches Speichermodell

- Es gibt einen **leeren** Speicher, und neue ("frische") Adressen:

$$\begin{aligned} \mathit{empty} &: \Sigma \\ \mathit{fresh} &: \Sigma \to \mathbf{Loc} \\ \mathit{rem} &: \Sigma \to \mathbf{Loc} \to \Sigma \end{aligned}$$

  - *fresh* modelliert **Allokation**, *rem* modelliert **Deallokation**
- *dom* beschreibt den **Definitionsbereich**:

$$\begin{aligned} \mathit{dom}(\sigma) &= \{l \mid \exists v.\ \mathit{read}(\sigma, l) = v\} \\ \mathit{dom}(\mathit{empty}) &= \emptyset \end{aligned}$$

- Eigenschaften von *empty*, *fresh* und *rem*:

$$\begin{aligned} \mathit{fresh}(\sigma) &\notin \mathit{dom}(\sigma) \\ \mathit{dom}(\mathit{rem}(\sigma, l)) &= \mathit{dom}(\sigma) \setminus \{l\} \\ l \neq m \implies \mathit{read}(\mathit{rem}(\sigma, l), m) &= \mathit{read}(\sigma, m) \end{aligned}$$

Zeigerarithmetik

- Ziegerarithmetik: Rechnen mit Zeigern
  - Implementiert Felder und Strukturen
  - Wir betrachten keine **Differenz** von Zeigern

$$\mathit{add} : \mathbf{Loc} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Loc}$$

$$\begin{aligned} \mathit{add}(l, 0) &= l \\ \mathit{add}(\mathit{add}(l, a), b) &= \mathit{add}(l, a + b) \\ \mathit{add}(l, a) = l &\implies a = 0 \\ \mathit{add}(l, a) = \mathit{add}(l, b) &\implies a = b \end{aligned}$$

Erweiterung der Semantik

- Problem: **Loc** haben unterschiedliche Semantik auf der linken oder rechten Seite einer Zuweisung.
  - x = x+1 — Links: Addresse der Variablen, rechts: Wert an dieser Adresse
- Lösung in C: "Except when it is (...) the operand of the unary & oprerator, the left operand of the . operator or an assigment operator, an lvalue that does not have array type is converted to the value stored in the designated object (and is no longer an lvalue)"
  C99 Standard, §6.3.2.1 (2)
- Nicht spezifisch für C

Umgebung

- Für Funktionen brauchten wir eine **Umgebung** (Environment):

$$\begin{aligned} \mathbf{Env} &= \mathit{Id} \rightharpoonup [\![\mathbf{FunDef}]\!] \\ &= \mathit{Id} \rightharpoonup \mathbf{V}^N \rightharpoonup \Sigma \rightharpoonup (\Sigma \times \mathbf{V}_u) \end{aligned}$$

- Diese muss erweitert werden für Variablen:

$$\mathbf{Env} = \mathit{Id} \rightharpoonup ([\![\mathbf{FunDef}]\!] \uplus \mathbf{Loc})$$

  - Insbesondere: gleicher Namensraum für Funktionen und Variablen (*C99 Standard*, §6.2.3)

Erweiterung der Semantik: Lexp

$$\mathcal{L}[\![-]\!] : \mathbf{Env} \to \mathbf{Lexp} \to \Sigma \rightharpoonup \mathbf{Loc}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\![x]\!]\ \Gamma &= \{(\sigma, \Gamma!x) \mid \sigma \in \Sigma\} \\ \mathcal{L}[\![\mathit{lexp}[a]]\!]\ \Gamma &= \{(\sigma, \mathit{add}(l, i \cdot \mathit{sizeof}(\tau))) \mid (\sigma, l) \in \mathcal{L}[\![\mathit{lexp}]\!]\ \Gamma, (\sigma, i) \in \mathcal{A}[\![a]\!]\ \Gamma\} \\ & \quad \mathit{type}(\Gamma, \mathit{lexp}) = \tau \text{ ist der Basistyp des Feldes} \\ \mathcal{L}[\![\mathit{lexp}.f]\!]\ \Gamma &= \{(\sigma, l.f) \mid (\sigma, \mathit{add}(l, \mathit{fld\_off}(\tau, f))) \in \mathcal{L}[\![\mathit{lexp}]\!]\ \Gamma\} \\ & \quad \mathit{type}(\Gamma, \mathit{lexp}) = \tau \text{ ist der Typ der Struktur} \\ \mathcal{L}[\![*e]\!]\ \Gamma &= \mathcal{A}[\![e]\!]\ \Gamma \end{aligned}$$

- $\mathit{type}(\Gamma, e)$ ist der **Typ** eines Ausdrucks
- $\mathit{fld\_off}(\tau, f)$ ist der **Offset** des Feldes f in der Struktur τ
- $\mathit{sizeof}(\tau)$ ist die **Größe** von Objekten des Typs τ

Erweiterung der Semantik: Aexp(1)

$$\mathcal{A}[\![-]\!] : \mathbf{Env} \to \mathbf{Aexp} \to \Sigma \rightharpoonup \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\![n]\!]\ \Gamma &= \{(\sigma, n) \mid \sigma \in \Sigma\} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \\ \mathcal{A}[\![e]\!]\ \Gamma &= \{(\sigma, \mathit{read}(\sigma, l)) \mid (\sigma, l) \in \mathcal{L}[\![e]\!]\ \Gamma\} \\ & \quad e \in \mathbf{Lexp} \text{ und } \mathit{type}(\Gamma, e) \text{ kein Array-Typ} \\ \mathcal{A}[\![e]\!]\ \Gamma &= \{(\sigma, l) \mid (\sigma, l) \in \mathcal{L}[\![e]\!]\ \Gamma\} \\ & \quad e \in \mathbf{Lexp} \text{ und } \mathit{type}(\Gamma, e) \text{ Array-Typ} \\ \mathcal{A}[\![\&e]\!]\ \Gamma &= \{(\sigma, l) \mid (\sigma, l) \in \mathcal{L}[\![e]\!]\ \Gamma\} \end{aligned}$$

Erweiterung der Semantik: Aexp(2)

$$\mathcal{A}[\![-]\!] : \mathbf{Env} \to \mathbf{Aexp} \to \Sigma \rightharpoonup \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\![a_0 + a_1]\!]\ \Gamma &= \{(\sigma, n_0 + n_1 \mid (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!]\ \Gamma \wedge (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!]\ \Gamma\} \\ \mathcal{A}[\![a_0 - a_1]\!]\ \Gamma &= \{(\sigma, n_0 - n_1) \mid (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!]\ \Gamma \wedge (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!]\ \Gamma\} \\ \mathcal{A}[\![a_0 * a_1]\!]\ \Gamma &= \{(\sigma, n_0 * n_1) \mid (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!]\ \Gamma \wedge (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!]\ \Gamma\} \\ \mathcal{A}[\![a_0 / a_1]\!]\ \Gamma &= \{(\sigma, n_0 / n_1) \mid (\sigma, n_0) \in \mathcal{A}[\![a_0]\!]\ \Gamma\ \wedge (\sigma, n_1) \in \mathcal{A}[\![a_1]\!]\ \Gamma \\ & \qquad \wedge\ n_1 \neq 0\} \end{aligned}$$

Und jetzt?

- Zustand erweitert, so dass wir Zeiger modellieren können.
- Semantik entsprechend erweitert.
- Was machen wir mit dem Hoare-Kalkül, speziell der **Zuweisung**?
- Vorherige Modellierung — Zuweisung durch Substitution modelliert — nicht mehr ausreichend.
- Daher: **explizite Zustandsprädikate**

Explizite Zustandsprädikate

- Zusicherungenen (**Assn**) sind zustandsabhängige Prädikate
  - Mit anderen Worten, Prädikate über Programmvariablen.
- Axiomatische Beschreibung des Zustandes erforderte neue Modellierung auf der Ebene der Prädikate
- Explizite Zustandsprädikate modellieren die Zustandsoperationen *read* und *upd* **explizit**

Explizite Zustandsprädikate

- Erweiterung von **Aexpv** um *read*, neue Sorte **State** mit Operation *upd*:

$\mathbf{Lexp}_s$ $l ::= \ldots \mid \cancel{*a}$

$\mathbf{Assn}_s$ $b ::= \ldots$

$\mathbf{Aexp}_s$ $a ::= \mathit{read}(S, l) \mid \mathbf{Z} \mid \mathbf{C} \mid l \mid \cancel{\&l} \mid \ldots \mid \backslash\mathbf{old}(e) \mid \ldots$

$\mathbf{State}$ $S ::= \mathit{StateVar} \mid \mathit{upd}(S, l, e)$

- Zustandsvariablen *StateVar*: Aktueller Zustand σ, Vorzustand ρ
- Explizite Zustandsprädikate enthalten kein $*$ oder &
- Damit Semantik:

$$\mathcal{B}_{sp}[\![.]\!] : \mathbf{Env} \to \mathbf{Assn}_s \rightharpoonup (\Sigma \times (\Sigma \times \mathbf{V}_U)) \to \mathbb{B}$$
$$\mathcal{A}_{sp}[\![.]\!] : \mathbf{Env} \to \mathbf{Aexp}_s \rightharpoonup (\Sigma \times (\Sigma \times \mathbf{V}_U)) \to \mathbf{V}$$

Hoare-Triple

$$\Gamma \models \{P\}\, c\, \{Q|R\}$$

- $P, Q, R \in \mathbf{Assn}_s$ sind **explizite Zustandsprädikate**
- Deklarationen (**Decl**) allozieren für jede Variable eine Location (*fresh*), und ordnen diese in Γ dem Namen zu.
- Gültigkeit von Hoare-Tripeln (partielle, totale Korrektheit) wie vorher

Floyd-Hoare-Kalkül mit expliziten Zustandsprädikaten

$$\overline{\Gamma \vdash \{Q[\mathit{upd}(\sigma, x, e)/\sigma]\}\, x = e\, \{Q|R\}}$$

- Ein **Lexp** l auf der rechten Seite e wird durch $\mathit{read}(\sigma, l)$ ersetzt.[1]
- & dient lediglich dazu, diese Konversion zu verhindern.
- $*$ erzwingt diese Konversion, auch auf der linken Seite x.
- Beispiel: $*a = *\&b;$

[1] Außer l ist ein Array-Typ.

Formal: Konversion in Zustandsprädikate

$$(-)^\dagger : \mathbf{Lexp} \to \mathbf{Lexp}_s$$
$$i^\dagger = i \quad (i \in \mathbf{Idt})$$
$$l.id^\dagger = l^\dagger.id$$
$$l[e]^\dagger = l^\dagger[e^\#]$$
$$*l^\dagger = l^\#$$

$$(-)^\# : \mathbf{Aexp} \to \mathbf{Aexp}_s$$
$$e^\# = \mathit{read}(\sigma, e^\dagger) \quad (e \in \mathbf{Lexp})$$
$$n^\# = n$$
$$v^\# = v \quad (v \text{ logische Variable})$$
$$\&e^\# = e^\dagger$$
$$e_1 + e_2{}^\# = e_1{}^\# + e_2{}^\#$$
$$\backslash\mathbf{result}^\# = \backslash\mathbf{result}$$
$$\backslash\mathbf{old}(e)^\# = \backslash\mathbf{old}(e)$$

$$\overline{\Gamma \vdash \{Q[\mathit{upd}(\sigma, x^\dagger, e^\#)/\sigma]\}\, x = e\, \{Q|R\}}$$

Zwei kurze Beispiele

```
void foo(){
 int x, y, z;
 // {true}
 z= x;
 x= 0;
 z= 5;
 y= x;
 // {y = 0}
}
```

```
void foo(){
 int x, y, *z;
 // {true}
 z= &x;
 x= 0;
 *z= 5;
 y= x;
 // {y = 5}
```


Ein problematisches Beispiel

```
void foo(int *p)
{
 int x;

 // {true}
 x= 7;
 *p= 99;
 // {x = 7}
}
```

- Können **weder** beweisen, dass $*p = x$ **noch** $*p \neq x$
- Erfordert Spezifikation: wenn $*p$ auf ein **gültiges** Objekt zeigt, dann $*p \neq x$ da x **lokale** Variable.
- Generelles Problem — was ist mit

```
void foo(int *p, int *q)
{ ... }
```

- Können weder beweisen, dass $*p = *q$ noch $*p \neq *q$

Weitere Beispiele: Felder

```
#include <limits.h>
#define N 10
int a[N];

int findmax(int a[], int a_len)
  /** pre  \array(a, a_len); */
  /** post ∀i. 0 ≤ i < a_len ⟶ a[i] ≤ \result; */
{
  int x; int j;

  x= INT_MIN; j= 0;
  while (j< a_len)
    /** inv (∀i. 0 ≤ i < j ⟶ a[i] ≤ x) ∧ j ≤ a_len; */
    {
    if (a[j]> x) x= a[j];
    j= j+1;
    }
  return x;
}
```


Felder und Zeiger revisited

- In C sind Zeiger und Felder schwach spezifiziert
- Insbesondere:
  - a[j]= ∗(a+j) für a Array-Typ
  - Derefenzierung von ∗x nur definiert, wenn x "gültig" ist (d.h. auf ein Objekt zeigt) *C99 Standard*, §6.5.3.2(4)
- Bisher in den Hoare-Regeln ignoriert — **partielle** Korrektheit.
- Ist das sinnvoll? Nein, bekannte Fehlerquelle

Spezifikation von Zeigern und Feldern

Das Prädikat \valid(x)

$\backslash\mathbf{valid}(x) \iff \mathit{read}(\sigma, x^{\dagger})$ ist definiert

- Insbesondere: $\backslash\mathbf{valid}(*x) \iff \mathit{read}(\sigma, \mathit{read}(\sigma, x))$ ist definiert.
- Felder als Parameter werden Zeigern konvertiert, deshalb müssen wir spezifizieren können, dass ein Zeiger "in Wirklichkeit" ein Feld ist.
- $\backslash\mathbf{array}(a, n)$ bedeutet: a ist ein Feld der Länge n, d.h.

$$\backslash\mathbf{array}(a, n) \iff (\forall i.\, 0 \le i < n \implies \backslash\mathbf{valid}(a[i]))$$

- Validität kann abgeleitet werden:

$$\frac{\text{x= \&e}}{\backslash\text{valid(*x)}} \qquad \frac{\backslash\text{array(a, n)} \quad 0 \le i \quad i < n}{\backslash\text{valid(a[i])}}$$

Zusammenfassung

- Um Referenzen (Pointer) in C behandeln zu können, benötigen wir ein erweitertes **Zustandsmodell**
- Referenzen werden zu Werten wie Zahlen oder Zeichen.
  - Arrays und Strukturen sind **keine** first-class values.
  - Großes Problem: **aliasing**
- Erweiterung der Semantik und der Hoare-Tripel nötig:
  - Vor/Nachbedingungen werden zu **expliziten Zustandsprädikaten**.
  - Zuweisung wird zu **Zustandsupdate**.
  - Problem:
    - Zustände werden **sehr groß**
    - Rückwärtsrechnung erzeugt schnell sehr große „unbestimmte" Zustände, die nicht vereinfacht werden können
    - Hier ist Vorwärtsrechnung vorteilhaft

Korrekte Software: Grundlagen und Methoden
Vorlesung 13 vom 03.07.18: Rückblick & Ausblick

Serge Autexier, Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2018

Fahrplan

- Einführung
- Operationale Semantik
- Denotationale Semantik
- Äquivalenz der Operationalen und Denotationalen Semantik
- Die Floyd-Hoare-Logik
- Invarianten und die Korrektheit des Floyd-Hoare-Kalküls
- Strukturierte Datentypen
- Modellierung und Spezifikation
- Verifikationsbedingungen
- Vorwärts mit Floyd und Hoare
- Funktionen und Prozeduren
- Referenzen
- Ausblick und Rückblick

Was gibt's heute?

- Rückblick
- Ausblick
- Feedback

Rückblick

Semantik

- Operational — Auswertungsrelation $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma'$
- Denotational — Partielle Funktion $[\![c]\!] : \Sigma \rightharpoonup \Sigma$
- Axiomatisch — Floyd-Hoare-Logik
- Welche Semantik wofür?
- Beweis: Äquivalenz von operationaler und denotationaler Semantik

Floyd-Hoare-Logik

- Floyd-Hoare-Logik: partiell und total
- $\vdash \{P\}\, c\, \{Q\}$ vs. $\models \{P\}\, c\, \{Q\}$: Vollständigkeit, Korrektheit
- Die sechs Basisregeln
- Zuweisungsregel: vorwärts (Floyd) vs. rückwärts (Hoare)
- VCG: Schwächste Vorbedingung und stärkste Nachbedingung
- Beweis: Korrektheit und Vollständigkeit der Floyd-Hoare-Logik

Erweiterung der Programmiersprache

- Für jede Erweiterung:
  - Wie modellieren wir semantisch?
  - Wie ändern sich die Regeln der Logik?
- Strukturen und Felder
  - Lokationen: strukturierte Werte **Lexp**
  - Erweiterte Substitution in Zuweisungsregel

Erweiterung der Programmiersprache

- Prozeduren und Funktionen
  - Modellierung von **return**: Erweiterung zu $\Sigma \rightharpoonup \Sigma \times \mathbf{V}_U$
  - Spezifikation von Funktionen durch Vor-/Nachbedingungen
  - Spezifikation der Funktionen muss im Kontext stehen
- Referenzen
  - Konversion zwischen **Lexp**und **Aexp**
  - Lokationen nicht mehr symbolisch (Variablennamen), sondern abstrakt $\Sigma = \mathbf{Loc} \rightharpoonup \mathbf{V}, \mathbf{V} = \mathbb{Z} + \mathbf{Loc}$
  - Zustand als **abstrakter Datentyp** mit Operationen *read* und *upd*
  - Zuweisung nicht mehr mit Substitution, sondern explizit durch *upd*
  - Spezifikationen sind **explizite Zustandsprädikate**, Konversion $(-)^\dagger, (-)^\#$

Ausblick

Was geht noch?

- Die Sprache C
- Andere Programmiersprachen
- Logik und Spezifikation
- Success Stories

Die Sprache C: Was haben wir ausgelassen?

Semantik:

- Nichtdeterministische Semantik: Seiteneffekte, Sequence Points
  ⟶ Umständlich zu modellieren, Effekt zweitrangig
- Implementationsabhängiges, unspezifiziertes und undefiniertes Verhalten
  ⟶ Genauere Unterscheidung in der Semantik

Kontrollstrukturen:

- **switch** ⟶ Ist im allgemeinen Fall ein **goto**
- **goto**, setjmp/longjmp
  ⟶ Allgemeinfall: tiefe Änderung der Semantik (*continuations*)

Die Sprache C: Was haben wir ausgelassen?

Typen:

- Funktionszeiger ⟶ Für "saubere" Benutzung gut zu modellieren
- Weitere Typen: **short**/**long int**, **double**/**float**, wchar_t, und Typkonversionen ⟶ Fleißarbeit
- Fließkommazahlen ⟶ Spezifikation nicht einfach
- **union** ⟶ Kompliziert das Speichermodell
- **volatile** ⟶ Bricht read/update-Gleichungen
- **typedef** ⟶ Ärgernis für Lexer/Parser, sonst harmlos

Die Sprache C: Was haben wir ausgelassen?

Für **realistische C-Programme**:

- Compiler-Erweiterungen (`gcc`, `clang`)
- Büchereien (Standardbücherei, Posix, . . .)
- Nebenläufigkeit

Andere Sprachen: Wie modelliert man Java?

- Die **Kernsprache** ist ähnlich zu C0.
- Java hat erschwerend:
  - dynamische Bindung,
  - Klassen mit gekapselten Zustand und Invarianten,
  - Nebenläufigkeit, und
  - Reflektion.
- Java hat dafür aber
  - ein einfacheres Speichermodell, und
  - eine wohldefinierte Ausführungsumgebung (die JVM).

Andere Sprachen: Wie modelliert man C++?

- Sehr **vorsichtig** (konservativ)
- Viele Features, fehlende formale Semantik, . . .
- Mehrfachvererbung theoretisch anspruchsvoll
- Es gibt **keine** Formalismen/Werkzeuge, die C++ voll unterstützen
- Ansätze: Übersetzung nach C/LLVM, Behandlung dort

Andere Sprachen: Wie modelliert man PHP?

Gar nicht.

Logik und Spezifikation

- Wir **generieren** Verifikationsbedingungen, wie kann man sie **beweisen**?
- **Automatische Beweiser:**
  - **SAT-Checker** lösen Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (MiniSAT, Chaff)
  - **SMT-Beweiser** beweisen Aussagen der Prädikatenlogik mit linearer Arithmetik, Funktionen und Induktion (Z3, Yices, CVC)
- **Interaktive Beweiser:**
  - Beweisführung durch Benutzer, **Überprüfung** durch Beweiser
  - Sehr **mächtige** Logiken, aber nicht vollautomatisch (Isabelle, Coq)

Beispiel: Z3

- SMT-Beweiser versuchen Gegenbeweis zu konstruieren
- Daher: um ϕ zu beweisen, versuchen wir $\not\Phi$ zu widerlegen

Beweis einer VC:
$x \geq 0 \wedge y > 0 \Longrightarrow x = 0 * y + x$

Input Z3:

```
(declare-const x Int)
(declare-const y Int)
(assert
   (not (=> (and (>= x 0) (> y 0))
            (= x (+ (* 0 y) x))))
)
(check-sat)
```

Antwort:

```
unsat
```

Unerfüllbare VC:
$x \geq 0 \wedge y > 0 \Longrightarrow x \geq y$

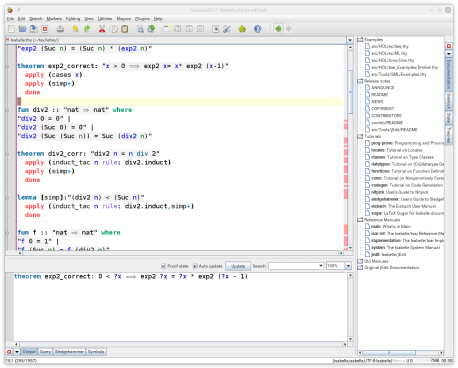
Input Z3:

```
(declare-const x Int)
(declare-const y Int)
(assert
   (not (=> (and (>= x 0) (> y 0))
            (>= x y)))
)
(check-sat)
```

Antwort:

```
sat
```


Beispiel: Isabelle



Korrekte Software in der Industrie

- Meist in speziellen Anwendungsgebieten: Luft-/Raumfahrt, Automotive, sicherheitskritische Systeme, Betriebssysteme
- Ansätze:
  1. Vollautomatisch: **statische Analyse** (Abstrakte Interpretation) für spezielle Aspekte: Freiheit von Ausnahmen und Unter/Überläufen, Programmsicherheit, Laufzeitverhalten (WCET) (nicht immer korrekt, meist vollständig)
     - Werkzeuge: `absint`
  2. Halbautomatisch: **Korrektheitsannotationen**, Überprüfung automatisch
     - Werkzeuge: Spark (ADA), Frama-C (C), JML (ESC/Java, Krakatao; Java), Boogie und Why (generisches VCG), VCC (C)
  3. Interaktiv: Einbettung der Sprache in interaktiven Theorembeweiser (Isabelle, Coq)
     - Beispiele: L4.verified, CompCert, SAMS

Feedback

Deine Meinung zählt

- Was war gut, was nicht?
- Arbeitsaufwand?
- Mehr **Theorie** oder mehr **Praxis**?
- Programmieraufgaben?
- Leichtgewichtiger Übungsbetrieb — mehr oder weniger?
- Bitte auch die **Evaluation** auf stud.ip beantworten!

Tschüß!