

Formale Methoden der Softwaretechnik 1
Vorlesung vom 02.11.09:
Prädikatenlogik erster Stufe

Christoph Lüth, Lutz Schröder

Universität Bremen

Wintersemester 2009/10

Das Tagesmenü

- ▶ Logik mit Quantoren
- ▶ Von Aussagenlogik zur Prädikatenlogik
- ▶ Natürliches Schließen mit Quantoren
- ▶ Die Notwendigkeit von Logik höherer Stufe

Fahrplan

- ▶ Teil I: Grundlagen der Formalen Logik
 - ▶ Einführung
 - ▶ Natürliches Schließen, Aussagenlogik
 - ▶ Prädikatenlogik 1. Stufe
 - ▶ Gleichungslogik und natürliche Zahlen
- ▶ Teil II: Arbeiten mit Isabelle
- ▶ Teil III: Modellierung imperative Programme

Prädikatenlogik

- ▶ **Beschränkung** der Aussagenlogik:
 - ▶ Eine Zahl n ist eine Primzahl genau dann wenn sie nicht 1 ist und nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

Prädikatenlogik

- ▶ **Beschränkung** der Aussagenlogik:
 - ▶ Eine Zahl n ist eine Primzahl genau dann wenn sie nicht 1 ist und nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.
 - ▶ Eine Zahl m ist durch eine Zahl n teilbar genau dann wenn es eine Zahl p gibt, so dass $m = n \cdot p$.

Prädikatenlogik

- ▶ **Beschränkung** der Aussagenlogik:
 - ▶ Eine Zahl n ist eine Primzahl genau dann wenn sie nicht 1 ist und nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.
 - ▶ Eine Zahl m ist durch eine Zahl n teilbar genau dann wenn es eine Zahl p gibt, so dass $m = n \cdot p$.
 - ▶ **Nicht** in Aussagenlogik **formalisierbar**.
- ▶ **Ziel**: Formalisierung von Aussagen wie
 - ▶ **Alle** Zahlen sind ein Produkt von Primfaktoren.
 - ▶ Es gibt **keine** größte Primzahl.

Erweiterung der Sprache

- ▶ **Terme** beschreiben die zu formalisierenden Objekte.
- ▶ **Formeln** sind logische Aussagen.
- ▶ Unser **Alphabet**:
 - ▶ **Prädikatsymbole**: $P_1, \dots, P_n, \doteq$ mit **Arität** $ar(P_i) \in \mathbb{N}$, $ar(\doteq) = 2$
 - ▶ **Funktionssymbole**: $f_1, \dots, f_m$ mit **Arität** $ar(t_i) \in \mathbb{N}$
 - ▶ Menge X von **Variablen** (abzählbar viele)
 - ▶ **Konnektive**: $\wedge, \longrightarrow, false, \forall, abgeleitet: \vee, \longleftrightarrow, \neg, \longleftarrow, \exists$

Terme

- ▶ Menge $\mathcal{Term}$ der **Terme** gegeben durch:
 - ▶ Variablen: $X \subseteq \mathcal{Term}$
 - ▶ Funktionssymbol f mit $ar(f) = n$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{Term}$, dann $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{Term}$
 - ▶ Sonderfall: $n = 0$, dann ist f eine **Konstante**, $f \in \mathcal{Term}$

Formeln

- ▶ Menge $\mathcal{Form}$ der **Formeln** gegeben durch:
 - ▶ $false \in \mathcal{Form}$
 - ▶ Wenn $\phi \in \mathcal{Form}$, dann $\neg\phi \in \mathcal{Form}$
 - ▶ Wenn $\phi, \psi \in \mathcal{Form}$, dann $\phi \wedge \psi \in \mathcal{Form}$, $\phi \vee \psi \in \mathcal{Form}$,
 $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{Form}$, $\phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{Form}$

Formeln

- ▶ Menge *Form* der **Formeln** gegeben durch:
 - ▶ $false \in \mathcal{Form}$
 - ▶ Wenn $\phi \in \mathcal{Form}$, dann $\neg\phi \in \mathcal{Form}$
 - ▶ Wenn $\phi, \psi \in \mathcal{Form}$, dann $\phi \wedge \psi \in \mathcal{Form}$, $\phi \vee \psi \in \mathcal{Form}$,
 $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{Form}$, $\phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{Form}$
 - ▶ Wenn $\phi \in \mathcal{Form}, x \in X$, dann $\forall x.\phi \in \mathcal{Form}, \exists x.\phi \in \mathcal{Form}$
 - ▶ Prädikatsymbol p mit $ar(p) = m$ und $t_1, \dots, t_m \in \mathcal{Term}$, dann $p(t_1, \dots, t_m) \in \mathcal{Form}$
 - ▶ Sonderfall: $t_1, t_2 \in \mathcal{Term}$, dann $t_1 \doteq t_2 \in \mathcal{Form}$

Beispielaussagen

- ▶ Alle Zahlen sind gerade oder ungerade.

Beispielaussagen

- ▶ Alle Zahlen sind gerade oder ungerade.
- ▶ Keine Zahl ist gerade und ungerade.

Beispielaussagen

- ▶ Alle Zahlen sind gerade oder ungerade.
- ▶ Keine Zahl ist gerade und ungerade.
- ▶ Es gibt keine größte Primzahl.

Beispielaussagen

- ▶ Alle Zahlen sind gerade oder ungerade.
- ▶ Keine Zahl ist gerade und ungerade.
- ▶ Es gibt keine größte Primzahl.
- ▶ Für jede Primzahl gibt es eine, die größer ist.

Beispielaussagen

- ▶ Alle Zahlen sind gerade oder ungerade.
- ▶ Keine Zahl ist gerade und ungerade.
- ▶ Es gibt keine größte Primzahl.
- ▶ Für jede Primzahl gibt es eine, die größer ist.
- ▶ Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x_0 , gdw. es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Freie und gebundene Variable

- ▶ Variablen in $t \in \mathcal{Term}$, $p \in \mathcal{Form}$ sind **frei**, **gebunden**, oder **bindend**.
 - ▶ x **bindend** in $\forall x.\phi$, $\exists x.\psi$
 - ▶ Für $\forall x.\phi$ und $\exists x.\phi$ ist x in Teilformel ϕ **gebunden**
 - ▶ Ansonsten ist x **frei**
- ▶ $FV(\phi)$: Menge der **freien** Variablen in ϕ
- ▶ Beispiel:

$$(q(x) \vee \exists x.\forall y.p(f(x), z) \wedge q(a)) \vee \forall r(x, z, g(x))$$

Substitution

- ▶ $t \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right]$ ist **Ersetzung** von x durch s in t
- ▶ Definiert durch strukturelle **Induktion**:

$$\begin{aligned} y \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s & x = y \\ y & x \neq y \end{cases} \\ f(t_1, \dots, t_n) \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} f(t_1 \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right], \dots, t_n \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right]) \\ \text{false} \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} \text{false} \\ (\phi \wedge \psi) \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} \phi \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \wedge \psi \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \\ (\phi \longrightarrow \psi) \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} \phi \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \longrightarrow \psi \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] \\ p(t_1, \dots, t_n) \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} p(t_1 \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right], \dots, t_n \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right]) \\ (\forall y. \phi) \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \forall y. \phi & x = y \\ \forall y. (\phi \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right]) & x \neq y, y \notin FV(s) \\ \forall z. ((\phi \left[\begin{smallmatrix} z \\ y \end{smallmatrix} \right]) \left[\begin{smallmatrix} s \\ x \end{smallmatrix} \right]) & x \neq y, y \in FV(s) \\ & \text{mit } z \notin FV(s) \text{ (z frisch)} \end{cases} \end{aligned}$$

Natürliches Schließen mit Quantoren

$$\frac{\phi}{\forall x.\phi} \forall I \quad (*) \qquad \frac{\forall x.\phi}{\phi \left[\frac{t}{x} \right]} \forall E \quad (\dagger)$$

- ▶ (*) **Eigenvariablenbedingung:**
x nicht **frei** in offenen Vorbedingungen von ϕ (x beliebig)
- ▶ ($\dagger$) Ggf. **Umbenennung** durch Substitution
- ▶ **Gegenbeispiele** für verletzte Seitenbedingungen

Der Existenzquantor

$$\exists x.\phi \stackrel{def}{=} \neg \forall x.\neg \phi$$

$$\frac{\phi \left[\frac{t}{x} \right]}{\exists x.\phi} \exists I \quad (\dagger) \qquad \frac{\exists x.\phi \quad \begin{array}{c} [\phi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\psi} \exists E \quad (*)$$

- ▶ (*) **Eigenvariablenbedingung:**
x nicht frei in ψ , oder einer offenen Vorbedingung außer ϕ
- ▶ (†) Ggf. **Umbenennung** durch Substitution

Zusammenfassung

- ▶ **Prädikatenlogik**: Erweiterung der Aussagenlogik um
 - ▶ Konstanten- und Prädikatensymbole
 - ▶ Gleichheit
 - ▶ Quantoren
- ▶ Das **natürliche Schließen** mit Quantoren
 - ▶ Variablenbindungen — Umbenennungen bei Substitution
 - ▶ Eigenvariablenbedingung
- ▶ Das nächste Mal: Gleichungen und natürliche Zahlen