

Formale Methoden der Softwaretechnik 1
Vorlesung vom 11.11.09:
Gleichungslogik und natürliche Zahlen

Christoph Lüth, Lutz Schröder

Universität Bremen

Wintersemester 2009/10

1

Das Tagesmenü

- ▶ Gleichheit in Logik 1. Stufe
- ▶ Die natürlichen Zahlen
- ▶ Eigenschaften der natürlichen Zahlen

2

Fahrplan

- ▶ Teil I: Grundlagen der Formalen Logik
 - ▶ Einführung
 - ▶ Natürliches Schließen, Aussagenlogik
 - ▶ Prädikatenlogik 1. Stufe
 - ▶ Gleichungslogik und natürliche Zahlen
- ▶ Teil II: Arbeiten mit Isabelle
- ▶ Teil III: Modellierung imperative Programme

3

Regeln für die Gleichheit

- ▶ Reflexivität, Symmetrie, Transitivität:

$$\frac{}{x = x} \text{ refl} \quad \frac{x = y}{y = x} \text{ sym} \quad \frac{x = y \quad y = z}{x = z} \text{ trans}$$

- ▶ Kongruenz:

$$\frac{x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n}{f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)} \text{ conf}$$

- ▶ Substitutivität:

$$\frac{x_1 = y_1, \dots, x_m = y_m \quad P(x_1, \dots, x_n)}{P(y_1, \dots, y_m)} \text{ subst}$$

4

Die natürlichen Zahlen

- ▶ Verschiedene Axiomatisierungen:
- ▶ Presburger-Arithmetik
 - ▶ 5 Axiome
 - ▶ Konsistent und vollständig
 - ▶ Entscheidbar (Aufwand 2^{2^n} , n Länge der Aussage)
 - ▶ Enthält Nichtstandardmodelle
- ▶ Peano-Arithmetik
 - ▶ 8 Axiome
 - ▶ Konsistent
 - ▶ Unvollständig (bzgl. Standard-Modellen)
 - ▶ Nicht entscheidbar

5

Zusammenfassung

- ▶ Gleichungslogik in natürlichem Schließen:
 - ▶ möglich
 - ▶ aber umständlich
- ▶ Entwicklung natürlicher Zahlen benötigt:
 - ▶ Zusätzliche Axiome
 - ▶ Konzepte höherer Ordnung (Induktion!)
- ▶ Deshalb nächstes Mal: Logik höherer Stufe

6