Formale Methoden der Softwaretechnik 1
Vorlesung vom 26.10.09: Formale Logik und natürliches Schließen

Christoph Lüth, Lutz Schröder

Universität Bremen

Wintersemester 2009/10

Heute

- Einführung in die formale Logik
- Aussagenlogik
  - Beispiel für eine einfache Logik
  - Guter Ausgangspunkt
- Natürliches Schließen
  - Wird auch von Isabelle verwendet.
- Buchempfehlung:
  Dirk van Dalen: Logic and Structure. Springer Verlag, 2004.

Fahrplan

- Teil I: Grundlagen der Formalen Logik
  - Einführung
  - Natürliches Schließen, Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik 1. Stufe
  - Grundlagen von Isabelle
  - Logik höherer Ordnung
- Teil II: Arbeiten mit Isabelle
- Teil III: Modellierung imperative Programme

Formale Logik

- Ziel: Formalisierung von Folgerungen wie
  - Wenn es regnet, wird die Straße nass.
  - Es regnet.
  - Also ist die Straße nass.
  - Nachts ist es dunkel.
  - Es ist hell.
  - Also ist es nicht nachts.
- Eine Logik besteht aus
  - Einer Sprache $\mathcal{L}$ von Formeln (Aussagen)
  - Schlußregeln (Folgerungsregeln) auf diesen Formeln.
- Damit: Gültige ("wahre") Aussagen berechnen.

Beispiel für eine Logik I

- Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$
- Schlußregeln:

$$\frac{\diamondsuit}{\clubsuit}\,\alpha \qquad \frac{\diamondsuit}{\spadesuit}\,\beta \qquad \frac{\clubsuit \quad \spadesuit}{\heartsuit}\,\gamma \qquad \frac{}{\diamondsuit}\,\delta$$

- Beispielableitung: $\heartsuit$

Beispiel für eine Logik II

- Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$
- Schlußregeln:

$$\frac{\diamondsuit}{\clubsuit}\,\alpha \qquad \frac{\diamondsuit}{\spadesuit}\,\beta \qquad \frac{\clubsuit \quad \spadesuit}{\heartsuit}\,\gamma \qquad \frac{\begin{matrix}[\diamondsuit]\\ \vdots \\ \heartsuit\end{matrix}}{\heartsuit}\,\delta'$$

- Beispielableitung: $\heartsuit$

Aussagenlogik

- Sprache $Prop$ gegeben durch:
  1. Variablen $V \subseteq Prop$ (Menge V gegeben)
  2. $false \in Prop$
  3. Wenn $\phi, \psi \in Prop$, dann
     - $\phi \wedge \psi \in Prop$
     - $\phi \vee \psi \in Prop$
     - $\phi \longrightarrow \psi \in Prop$
     - $\phi \longleftrightarrow \psi \in Prop$
  4. Wenn $\phi \in Prop$, dann $\neg\phi \in Prop$.

Wann ist eine Formel gültig?

- Semantische Gültigkeit $\models P$: Wahrheitstabellen etc.
  - Wird hier nicht weiter verfolgt.
- Syntaktische Gültigkeit $\vdash P$: formale Ableitung,
  - Natürliches Schließen
  - Sequenzenkalkül
  - Andere (Hilbert-Kalkül, gleichungsbasierte Kalküle, etc.)
- Ziel: Kalkül, um Gültigkeit in $Prop$ zu beweisen

Natürliches Schließen

- Vorgehensweise:
  1. Erst Kalkül nur für $\wedge$, $\longrightarrow$, false
  2. Dann Erweiterung auf alle Konnektive.
- Für jedes Konnektiv: Einführungs- und Eliminitationsregel
- NB: konstruktiver Inhalt der meisten Regeln

Natürliches Schließen — Die Regeln

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge I \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge E_L \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge E_R$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \longrightarrow \psi}\ \longrightarrow I \qquad \frac{\phi \quad \phi \longrightarrow \psi}{\psi}\ \longrightarrow E$$

$$\frac{\mathit{false}}{\phi}\ \mathit{false} \qquad \frac{\begin{array}{c}[\phi \longrightarrow \mathit{false}] \\ \vdots \\ \mathit{false}\end{array}}{\phi}\ \mathrm{raa}$$

Konsistenz

- Def: Γ konsistent gdw. $\Gamma \nvdash \mathit{false}$
- Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent:
  (i) Γ konsistent
  (ii) Es gibt ein ϕ so dass $\Gamma \nvdash \phi$
  (iii) Es gibt kein ϕ so dass $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$
- Satz: Aussagenlogik mit natürlichem Schließen ist konsistent.
- Satz: Aussagenlogik mit natürlichem Schließen ist vollständig und entscheidbar

Die fehlenden Konnektive

- Einführung als Abkürzung:

$$\neg\phi \stackrel{\mathit{def}}{=} \phi \longrightarrow \mathit{false}$$

$$\phi \vee \psi \stackrel{\mathit{def}}{=} \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

$$\phi \longleftrightarrow \psi \stackrel{\mathit{def}}{=} (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \phi)$$

- Ableitungsregeln als Theoreme.

Die fehlenden Schlußregeln

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee I_L \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ \vee I_R \qquad \frac{\phi \vee \psi \quad \begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi] \\ \vdots \\ \sigma\end{array}}{\sigma}\ \vee E$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \mathit{false}\end{array}}{\neg\phi}\ \neg I \qquad \frac{\phi \quad \neg\phi}{\mathit{false}}\ \neg E$$

$$\frac{\phi \longrightarrow \psi \quad \psi \longrightarrow \phi}{\phi \longleftrightarrow \psi}\ \longleftrightarrow I \qquad \frac{\phi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\psi}\ \longleftrightarrow E_L \qquad \frac{\psi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\phi}\ \longleftrightarrow E_R$$

Zusammenfassung

- Formale Logik formalisiert das (natürlichsprachliche) Schlußfolgern
- Logik: Aussagen plus Schlußregeln (Kalkül)
- Aussagenlogik: Aussagen mit $\wedge$, $\longrightarrow$, false
  - $\neg$, $\vee$, $\longleftrightarrow$ als abgeleitete Operatoren
- Natürliches Schließen: intuitiver Kalkül
- Aussagenlogik konsistent, vollständig, entscheidbar.
- Nächstes Mal: Quantoren, HOL.