

Formale Methoden der Softwaretechnik
Vorlesung vom 16.05.11: Natürliches Schließen: Aussagenlogik

Till Mossakowski & Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2011

Heute

- ▶ **Natürliches Schließen**
 - ▶ Wird auch von **Isabelle** verwendet.
- ▶ **Aussagenlogik**
 - ▶ Beispiel für eine **einfache Logik**
 - ▶ Guter **Ausgangspunkt**
- ▶ **Buchempfehlung:**
Dirk van Dalen: **Logic and Structure**. Springer Verlag, 2004.

Fahrplan

- ▶ Aussagenlogik
- ▶ Prädikatenlogik
- ▶ Isabelle I: Grundlagen
 - ▶ Aussagenlogik und natürliches Schließen
 - ▶ Prädikatenlogik und Quantoren
 - ▶ Logik höherer Stufe
 - ▶ Definitionen und konservative Erweiterung
 - ▶ Automatische Beweisprozeduren
- ▶ Isabelle II: Anwendungen

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass.

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass.
 - ▶ Es regnet.

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass.
 - ▶ Es regnet.
 - ▶ Also ist die Straße nass.

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass. ▶ Nachts ist es dunkel.
 - ▶ Es regnet.
 - ▶ Also ist die Straße nass.

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass.
 - ▶ Es regnet.
 - ▶ Also ist die Straße nass.
 - ▶ Nachts ist es dunkel.
 - ▶ Es ist hell.

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass.
 - ▶ Es regnet.
 - ▶ Also ist die Straße nass.
 - ▶ Nachts ist es dunkel.
 - ▶ Es ist hell.
 - ▶ Also ist es nicht nachts.
- ▶ Eine **Logik** besteht aus
 - ▶ Einer **Sprache** \mathcal{L} von **Formeln** (**Aussagen**)
 - ▶ **Schlußregeln** (**Folgerungsregeln**) auf diesen Formeln.
- ▶ Damit: **Gültige** (“wahre”) Aussagen berechnen.

Beispiel für eine Logik I

- ▶ Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

Beispiel für eine Logik I

► Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

► Schlußregeln:

$$\frac{\diamondsuit}{\clubsuit} \alpha$$

$$\frac{\diamondsuit}{\spadesuit} \beta$$

$$\frac{\clubsuit \quad \spadesuit}{\heartsuit} \gamma$$

$$\frac{}{\diamondsuit} \delta$$

► Beispielableitung: \heartsuit

Beispiel für eine Logik II

► Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

► Schlußregeln:

$$\frac{\diamondsuit}{\clubsuit} \alpha$$

$$\frac{\diamondsuit}{\spadesuit} \beta$$

$$\frac{\clubsuit \quad \spadesuit}{\heartsuit} \gamma$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\diamondsuit] \\ \vdots \\ \heartsuit \end{array}}{\heartsuit} \delta'$$

► Beispielableitung: \heartsuit

Aussagenlogik

- ▶ Sprache \mathcal{Prop} gegeben durch:
 1. Variablen $V \subseteq \mathcal{Prop}$ (Menge V gegeben)
 2. $false \in \mathcal{Prop}$
 3. Wenn $\phi, \psi \in \mathcal{Prop}$, dann
 - ▶ $\phi \wedge \psi \in \mathcal{Prop}$
 - ▶ $\phi \vee \psi \in \mathcal{Prop}$
 - ▶ $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{Prop}$
 - ▶ $\phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{Prop}$
 4. Wenn $\phi \in \mathcal{Prop}$, dann $\neg\phi \in \mathcal{Prop}$.

Wann ist eine Formel gültig?

- ▶ **Semantische** Gültigkeit $\models P$: Wahrheitstabellen etc.
 - ▶ Wird hier nicht weiter verfolgt.
- ▶ **Syntaktische** Gültigkeit $\vdash P$: **formale** Ableitung,
 - ▶ Natürliches Schließen
 - ▶ Sequenzenkalkül
 - ▶ Andere (Hilbert-Kalkül, gleichungsbasierte Kalküle, etc.)
- ▶ Ziel: Kalkül, um **Gültigkeit** in *Prop* zu beweisen

Natürliches Schließen

- ▶ **Vorgehensweise:**

1. Erst Kalkül nur für \wedge , \longrightarrow , *false*

2. Dann **Erweiterung** auf **alle** Konnektive.

- ▶ Für jedes **Konnektiv**: **Einführungs-** und **Eliminationsregel**

- ▶ NB: **konstruktiver Inhalt** der meisten Regeln

Natürliches Schließen — Die Regeln

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E_L$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E_R$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \longrightarrow \psi} \longrightarrow I$$

$$\frac{\phi \quad \phi \longrightarrow \psi}{\psi} \longrightarrow E$$

$$\frac{\text{false}}{\phi} \text{false}$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\phi \longrightarrow \text{false}] \\ \vdots \\ \text{false} \end{array}}{\phi} \text{raa}$$

Konsistenz

- ▶ Def: Γ **konsistent** gdw. $\Gamma \not\vdash \text{false}$
- ▶ Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent:
 - (i) Γ konsistent
 - (ii) Es gibt ein ϕ so dass $\Gamma \not\vdash \phi$
 - (iii) Es gibt kein ϕ so dass $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$
- ▶ Satz: Aussagenlogik mit natürlichem Schließen ist **konsistent**.
- ▶ Satz: Aussagenlogik mit natürlichem Schließen ist **vollständig** und **entscheidbar**

Die fehlenden Konnektive

- ▶ Einführung als **Abkürzung**:

$$\neg\phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi \longrightarrow \textit{false}$$

$$\phi \vee \psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

$$\phi \longleftrightarrow \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \phi)$$

- ▶ Ableitungsregeln als **Theoreme**.

Die fehlenden Schlußregeln

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee I_L \quad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee I_R$$

$$\frac{\begin{array}{cc} [\phi] & [\psi] \\ \vdots & \vdots \\ \phi \vee \psi & \sigma \end{array} \quad \sigma}{\sigma} \vee E$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \vdots \\ \text{false} \end{array}}{\neg \phi} \neg I$$

$$\frac{\phi \quad \neg \phi}{\text{false}} \neg E$$

$$\frac{\phi \longrightarrow \psi \quad \psi \longrightarrow \phi}{\phi \longleftrightarrow \psi} \longleftrightarrow I$$

$$\frac{\phi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\psi} \longleftrightarrow E_L$$

$$\frac{\psi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\phi} \longleftrightarrow E_R$$

Zusammenfassung

- ▶ Formale Logik **formalisiert** das (natürlichsprachliche) Schlußfolgern
- ▶ **Logik**: Aussagen plus Schlußregeln (Kalkül)
- ▶ **Aussagenlogik**: Aussagen mit \wedge , \longrightarrow , *false*
 - ▶ \neg , \vee , \longleftrightarrow als **abgeleitete Operatoren**
- ▶ Natürliches **Schließen**: intuitiver Kalkül
- ▶ Aussagenlogik **konsistent**, **vollständig**, **entscheidbar**.
- ▶ Nächstes Mal: Aussagenlogik in **Isabelle**
- ▶ Nächste Woche: **Quantoren** und **Prädikate**