

Formale Methoden der Softwaretechnik Vorlesung vom 16.05.11: Natürliches Schließen: Aussagenlogik

Till Mossakowski & Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2011

Rev. 1448

1 [14]

Heute

- ▶ **Natürliches Schließen**
 - ▶ Wird auch von Isabelle verwendet.
- ▶ **Aussagenlogik**
 - ▶ Beispiel für eine einfache Logik
 - ▶ Guter Ausgangspunkt
- ▶ Buchempfehlung:
Dirk van Dalen: **Logic and Structure**. Springer Verlag, 2004.

2 [14]

Fahrplan

- ▶ Aussagenlogik
- ▶ Prädikatenlogik
- ▶ **Isabelle I: Grundlagen**
 - ▶ Aussagenlogik und natürliches Schließen
 - ▶ Prädikatenlogik und Quantoren
 - ▶ Logik höherer Stufe
 - ▶ Definitionen und konservative Erweiterung
 - ▶ Automatische Beweisprozeduren
- ▶ Isabelle II: Anwendungen

3 [14]

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass. ▶ Nachts ist es dunkel.
 - ▶ Es regnet. ▶ Es ist hell.
 - ▶ Also ist die Straße nass. ▶ Also ist es nicht nachts.
- ▶ Eine **Logik** besteht aus
 - ▶ Einer **Sprache** $\mathcal{L}$ von **Formeln** (Aussagen)
 - ▶ **Schlußregeln** (Folgerungsregeln) auf diesen Formeln.
- ▶ Damit: **Gültige** ("wahre") Aussagen berechnen.

4 [14]

Beispiel für eine Logik I

- ▶ Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

- ▶ Schlußregeln:

$$\frac{\diamondsuit}{\clubsuit} \alpha \quad \frac{\diamondsuit}{\spadesuit} \beta \quad \frac{\clubsuit \spadesuit}{\heartsuit} \gamma \quad \frac{}{\overline{\diamondsuit}} \delta$$

- ▶ Beispielableitung: $\heartsuit$

5 [14]

Beispiel für eine Logik II

- ▶ Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

- ▶ Schlußregeln:

$$\frac{\diamondsuit}{\clubsuit} \alpha \quad \frac{\diamondsuit}{\spadesuit} \beta \quad \frac{\clubsuit \spadesuit}{\heartsuit} \gamma \quad \frac{[\diamondsuit] \dots \heartsuit}{\heartsuit} \delta'$$

- ▶ Beispielableitung: $\heartsuit$

6 [14]

Aussagenlogik

- ▶ Sprache *Prop* gegeben durch:
 1. Variablen $V \subseteq \text{Prop}$ (Menge V gegeben)
 2. $\text{false} \in \text{Prop}$
 3. Wenn $\phi, \psi \in \text{Prop}$, dann
 - ▶ $\phi \wedge \psi \in \text{Prop}$
 - ▶ $\phi \vee \psi \in \text{Prop}$
 - ▶ $\phi \longrightarrow \psi \in \text{Prop}$
 - ▶ $\phi \longleftrightarrow \psi \in \text{Prop}$
 4. Wenn $\phi \in \text{Prop}$, dann $\neg \phi \in \text{Prop}$.

7 [14]

Wann ist eine Formel gültig?

- ▶ **Semantische** Gültigkeit $\models P$: **Wahrheitstabellen** etc.
 - ▶ Wird **hier** nicht weiter verfolgt.
- ▶ **Syntaktische** Gültigkeit $\vdash P$: **formale** Ableitung,
 - ▶ Natürliches Schließen
 - ▶ Sequenzenkalkül
 - ▶ Andere (Hilbert-Kalkül, gleichungsbasierte Kalküle, etc.)
- ▶ Ziel: Kalkül, um **Gültigkeit** in *Prop* zu beweisen

8 [14]

Natürliches Schließen

► Vorgehensweise:

1. Erst Kalkül nur für $\wedge, \rightarrow, \text{false}$
2. Dann Erweiterung auf alle Konnektive.

► Für jedes Konnektiv: Einführungs- und Eliminationsregel

► NB: konstruktiver Inhalt der meisten Regeln

9 [14]

Natürliches Schließen — Die Regeln

$$\begin{array}{c}
 \frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E_L \quad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E_R \\
 \\
 \frac{[\phi] \quad \vdots \quad \psi}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow I \qquad \frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow E \\
 \\
 \frac{\text{false} \quad \text{false}}{\phi} \text{false} \qquad \frac{[\phi \rightarrow \text{false}] \quad \vdots \quad \text{false}}{\phi} \text{raa}
 \end{array}$$

10 [14]

Konsistenz

► Def: Γ konsistent gdw. $\Gamma \not\vdash \text{false}$

► Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Γ konsistent
- (ii) Es gibt ein ϕ so dass $\Gamma \not\vdash \phi$
- (iii) Es gibt kein ϕ so dass $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$

► Satz: Aussagenlogik mit natürlichem Schließen ist konsistent.

► Satz: Aussagenlogik mit natürlichem Schließen ist vollständig und entscheidbar

11 [14]

Die fehlenden Konnektive

► Einführung als Abkürzung:

$$\begin{array}{l}
 \neg\phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi \rightarrow \text{false} \\
 \phi \vee \psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \\
 \phi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)
 \end{array}$$

► Ableitungsregeln als Theoreme.

12 [14]

Die fehlenden Schlußregeln

$$\begin{array}{c}
 \frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee I_L \quad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee I_R \qquad \frac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \vdots \\ \sigma \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi] \\ \vdots \\ \sigma \end{array}}{\phi \vee \psi} \vee E \\
 \\
 \frac{[\phi] \quad \vdots \quad \text{false}}{\neg\phi} \neg I \qquad \frac{\phi \quad \neg\phi}{\text{false}} \neg E \\
 \\
 \frac{\phi \rightarrow \psi \quad \psi \rightarrow \phi}{\phi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I \qquad \frac{\phi \quad \phi \leftrightarrow \psi}{\psi} \leftrightarrow E_L \quad \frac{\psi \quad \phi \leftrightarrow \psi}{\phi} \leftrightarrow E_R
 \end{array}$$

13 [14]

Zusammenfassung

► Formale Logik formalisiert das (natürlichsprachliche) Schlußfolgern

► Logik: Aussagen plus Schlußregeln (Kalkül)

► Aussagenlogik: Aussagen mit $\wedge, \rightarrow, \text{false}$

► $\neg, \vee, \leftrightarrow$ als abgeleitete Operatoren

► Natürliches Schließen: intuitiver Kalkül

► Aussagenlogik konsistent, vollständig, entscheidbar.

► Nächstes Mal: Aussagenlogik in Isabelle

► Nächste Woche: Quantoren und Prädikate

14 [14]