Äquivalenz der Semantiken

Lemma: Für $a \in$ **Aexp**, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}[\![a]\!]\sigma = n \longleftrightarrow \langle a, \sigma\rangle \Rightarrow n$
Beweis: Strukturelle Induktion über a

Lemma: Für $b \in$ **BExp**, $t \in Bool$, $\mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = t \longleftrightarrow \langle b, \sigma\rangle \Rightarrow t$
Beweis: Strukturelle Induktion über b

Lemma: Für $c \in$ **Com**, $\langle c, \sigma\rangle \Rightarrow \sigma' \longrightarrow \mathcal{D}[\![c]\!]\sigma = \sigma'$
Beweis: Induktion über der Herleitung von $\langle c, \sigma\rangle \Rightarrow \sigma'$.

*Satz (*Äquivalenz der Semantiken*):* Für $c \in$ **Com**, und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$,

$$\langle c, \sigma\rangle \Rightarrow \sigma' \longleftrightarrow \mathcal{D}[\![c]\!]\sigma = \sigma'$$

Beweis: Strukturelle Induktion über c mit *Fixpunktinduktion* für `while`

Axiomatische Semantik

- Abstraktionsgrad zwischen *operationaler* und *denotationaler* Semantik
- Idee: *Annotierte* Programme
  `M:= 1;`$\{M = 1, N = n\}$
  `while 0 < N do M:= N* M; N:= N- 1 od`$\{N \leq 0 \wedge M = n!\}$
- *Vor-* und *Nachbedingungen:* $\{A\}c\{B\}$
  $$\frac{\{A \wedge b\}c\{A\}}{\{A\}\texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ c\ \texttt{od}\{A \wedge \neg b\}}$$
- *Partielle* und *totale* Korrektheit.
- Hoare-Kalkül, schwächste Vorbedingung $\rightsquigarrow$ nächtes Jahr

Zusammenfassung

- Semantik von *imperative Programme*: *Zustandsübergang*
  - *Denotationale* und *operationale* Semantik
- *Spezifikation* imperativer Programme: *welche* Zustandsübergänge?
- *Nächstes Jahr*: Hoare-Kalkül, schwächste Vorbedingung; Z.

Anhang

Auf den folgenden Seiten:

- Vollständige *operationale Semantik* für **IMP**:
  - Arithmetische Ausdrücke
  - Boolsche Ausdrücke (zwei Varianten)
  - Anweisungen
- Vollständige Denotationale Semantik für **IMP**:
  - Arithmetische Ausdrücke
  - Boolsche Ausdrücke

Operationale Semantik I: Aexp

Zahlen: $\dfrac{}{\langle n, \sigma\rangle \Rightarrow n}$

Variablen: $\dfrac{}{\langle \texttt{X}, \sigma\rangle \Rightarrow \sigma(\texttt{X})}$

Addition: $\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \Rightarrow n \quad \langle a_1, \sigma\rangle \Rightarrow m}{\langle a_0 \texttt{ + } a_1, \sigma\rangle \Rightarrow n + m}$

Subtraktion: $\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \Rightarrow n \quad \langle a_1, \sigma\rangle \Rightarrow m}{\langle a_0 \texttt{ - } a_1, \sigma\rangle \Rightarrow n - m}$

Multiplikation: $\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \Rightarrow n \quad \langle a_1, \sigma\rangle \Rightarrow m}{\langle a_0 \texttt{ * } a_1, \sigma\rangle \Rightarrow n \cdot m}$

Operationale Semantik II: Bexp

$\dfrac{}{\langle \texttt{True}, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}$ $\qquad$ $\dfrac{}{\langle \texttt{False}, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}$

$\dfrac{\langle b, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}{\langle \texttt{not}\ b, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}$ $\qquad$ $\dfrac{\langle b, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}{\langle \texttt{not}\ b, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}$

$\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \Rightarrow n \quad \langle a_1, \sigma\rangle \Rightarrow m}{\langle a_0 \texttt{ = } a_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}$ if $n = m$ $\qquad$ $\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \Rightarrow n \quad \langle a_1, \sigma\rangle \Rightarrow m}{\langle a_0 \texttt{ = } a_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}$ if $n \neq m$

$\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \Rightarrow n \quad \langle a_1, \sigma\rangle \Rightarrow m}{\langle a_0 \texttt{ <= } a_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}$ if $n \leq m$ $\qquad$ $\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \Rightarrow n \quad \langle a_1, \sigma\rangle \Rightarrow m}{\langle a_0 \texttt{ <= } a_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}$ if $n > m$

Operationale Semantik IIa: Bexp (sequentielles `and`, `or`)

$\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}{\langle b_0\ \texttt{and}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}$

$\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}{\langle b_0\ \texttt{and}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}$ $\qquad$ $\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}{\langle b_0\ \texttt{and}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}$

$\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}{\langle b_0\ \texttt{or}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}$

$\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}{\langle b_0\ \texttt{or}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}$ $\qquad$ $\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}{\langle b_0\ \texttt{or}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}$

Operationale Semantik IIb: Bexp (paralleles `and`,`or`)

$\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}{\langle b_0\ \texttt{and}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}$ $\qquad$ $\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}{\langle b_0\ \texttt{and}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}$

$\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}{\langle b_0\ \texttt{and}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}$ $\qquad$ $\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}{\langle b_0\ \texttt{and}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}$

$\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}{\langle b_0\ \texttt{or}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}$ $\qquad$ $\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}{\langle b_0\ \texttt{or}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}$

$\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}{\langle b_0\ \texttt{or}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true}}$ $\qquad$ $\dfrac{\langle b_0, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}{\langle b_0\ \texttt{or}\ b_1, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}$

Operationale Semantik III: Com

$$\frac{}{\langle \texttt{skip}, \sigma\rangle \Rightarrow \sigma} \qquad \frac{\langle a, \sigma\rangle \Rightarrow n}{\langle X := a, \sigma\rangle \Rightarrow \sigma[n/X]}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true} \quad \langle c_0, \sigma\rangle \Rightarrow \tau}{\langle \texttt{if}\ \ b\ \texttt{then}\ \ c_0\ \texttt{else}\ \ c_1\ \texttt{fi}, \sigma\rangle \Rightarrow \tau} \qquad \frac{\langle b, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false} \quad \langle c_1, \sigma\rangle \Rightarrow \tau}{\langle \texttt{if}\ \ b\ \texttt{then}\ \ c_0\ \texttt{else}\ \ c_1\ \texttt{fi}, \sigma\rangle \Rightarrow \tau}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{false}}{\langle \texttt{while}\ \ b\ \ \texttt{do}\ \ c\ \texttt{od}, \sigma\rangle \Rightarrow \sigma} \qquad \frac{\langle c_0, \sigma\rangle \Rightarrow \tau \quad \langle c_1, \tau\rangle \Rightarrow \tau'}{\langle c_0;\ c_1, \sigma\rangle \Rightarrow \tau'}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \Rightarrow \mathit{true} \quad \langle c, \sigma\rangle \Rightarrow \tau' \quad \langle \texttt{while}\ \ b\ \ \texttt{do}\ \ c\ \texttt{od}, \tau'\rangle \Rightarrow \tau}{\langle \texttt{while}\ \ b\ \ \texttt{do}\ \ c\ \texttt{od}, \sigma\rangle \Rightarrow \tau}$$