Zusammenfassung

- Der λ-Kalkül:
  - Ein einfaches *Berechnungsmodell*
  - *Meta-Sprache* mit *Bindungen* und *Typisierung*
  - $\alpha-$, β, η-Konversion.
- *Einbettung* von Syntax (*higher-order abstract syntax*):
  - Aussagenlogik
  - *Prädikatenlogik*
- Nächstes Mal: *Logik höherer Stufe*, eingebettet in λ-Kalkül.

Vorlesung vom 21.11.05: Logik höherer Stufe II

Organisatorisches

- Vorlesung nächste Woche (28.11.05) *fällt aus!*
- *Ersatzvorlesung*: diese Woche Do 10-12

Fahrplan

- Letzte Woche:
  - Der λ-*Kalkül*
  - *Einbettung* von Logiken in den λ-Kalkül
- Heute: *Logik höherer Stufe*
  - *Typen* und *Terme*
  - Die Basis-*Axiome*
  - Definierte *Operatoren*
  - *Konservative* Erweiterung

Wo sind wir?

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik
- Logik höherer Stufe
- *Isabelle/HOL*

Logik höherer Stufe

- *Ziel:* Formalisierung von Mathematik
  - "Logik für Erwachsene"
- *Problem*: Mögliche *Inkonsistenz* (*Russel*'s Paradox)
- *Lösung: Restriktion* vs. *Ausdrucksstärke*
- Alternative *Grundlagen*:
  - Andere *Typtheorien* (Martin-Löf, Calculus of Constructions)
  - Ungetypte *Mengenlehre* (ZFC)
- *HOL*: guter *Kompromiss*, weit verbreitet.
  - *Klassische Logik* höherer Stufe nach *Church*
  - *Schwächer* als ZFC, *stärker* als Typtheorien

Warum Logik höherer Stufe?

- *Logik 1. Stufe*: Quantoren über Terme

$$\forall\, x, y. x = y \longrightarrow y = x$$

- *Logik 2. Stufe*: Quantoren über *Prädikaten* und *Funktionen*

$$\forall\, P.(P(0) \wedge \forall\, x.P(x) \longrightarrow P(Sx)) \longrightarrow \forall\, x.Px$$

- *Logik 3. Stufe*: Quantoren über Argumenten von Prädikaten
- *Logik höherer Stufe*: alle endlichen Quantoren
  - Keine *wesentlichen Vorteile* von Logik 2. Ordnung
- *Wichtig:* Vermeidung von *Inkonsistenzen*
  - Unterscheidung zwischen *Termen* und *Aussagen*

Typen

Typen $\mathcal{T}ype$ gegeben durch

- *Typkonstanten*: $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}ype}$ (Menge $\mathcal{C}_{\mathcal{T}ype}$ gegeben)
  - $Prop, Bool \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}ype}$: $Prop$ alle Terme, $Bool$ alle Aussagen
- *Typvariablen*: $\alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}ype}$ (Menge $\mathcal{V}_{\mathcal{T}ype}$ gegeben)
- *Funktionen*: $s, t \in \mathcal{T}ype$ dann $s \Rightarrow t$ in $\mathcal{T}ype$

Konvention: *Funktionsraum* nach rechts geklammert
$\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma$ für $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$

Terme

Terme $\mathcal{T}erm$ gegeben durch

- *Konstanten*: $c \in \mathcal{C}$
- *Variablen*: $v \in \mathcal{V}$
- *Applikation*: $s, t \in \mathcal{T}erm$ dann $st \in \mathcal{T}erm$
- *Abstraktion*: $x \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T}erm$ dann $\lambda\, x.t \in \mathcal{T}erm$

Konventionen: *Applikation* links geklammert, mehrfache *Abstraktion* $\lambda\, xyz.fxyz$ für $\lambda\, x.\, \lambda\, y.\, \lambda\, z.((fx)y)z$

HOL: Basis-Syntax

$$\begin{array}{ll}
\neg & :: Bool \Rightarrow Bool \\
true & :: Bool \\
false & :: Bool \\
if & :: Bool \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha \\
\forall & :: (\alpha \Rightarrow Bool) \Rightarrow Bool \\
\exists & :: (\alpha \Rightarrow Bool) \Rightarrow Bool \\
\iota & :: (\alpha \Rightarrow Bool) \Rightarrow \alpha \\
= & :: \alpha \Rightarrow \alpha \Rightarrow Bool \\
\wedge & :: Bool \Rightarrow Bool \Rightarrow Bool \\
\vee & :: Bool \Rightarrow Bool \Rightarrow Bool \\
\longrightarrow & :: Bool \Rightarrow Bool \Rightarrow Bool
\end{array}$$

- Einbettung (wird weggelassen) $trueprop :: Bool \Rightarrow Ind$
- *Basis-Operatoren*: $\forall, \longrightarrow, =$
- *Syntaktische* Konventionen:
  - *Bindende* Operatoren: $\forall$, $\exists$, ι $\quad \forall\, x.P \equiv \forall(\lambda\, x.P)$
  - *Infix*-Operatoren: $\wedge, \vee, \longrightarrow, =$
  - *Mixfix*-Operator: $if\ b\ then\ p\ else\ q \equiv if\ \ b\ \ p\ \ q$

Basis-Axiome I: Gleichheit

- *Reflexivität*:

$$\frac{}{t = t}\,\mathsf{refl}$$

- *Substitutivität*:

$$\frac{s = t \quad P(s)}{P(t)}\,\mathsf{subst}$$

- *Extensionalität*:

$$\frac{\forall\, x.fx = gx}{(\lambda\, x.fx) = (\lambda\, x.gx)}\,\mathsf{ext}$$

- *Einführungsregel*:

$$\frac{}{(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (Q \longrightarrow P) \longrightarrow (P = Q)}\,\mathsf{iff}$$

Basis-Axiome II: Implikation

- *Einführungsregel*:

$$\frac{\begin{array}{c}[P]\\ \vdots \\ Q\end{array}}{P \longrightarrow Q}\,\mathsf{impl}$$

- *Eliminationsregel*:

$$\frac{P \longrightarrow Q \quad P}{Q}\,\mathsf{mp}$$

Die Basis-Axiome III: Auswahl

- *Eliminitationsregel* des Auswahloperators:

$$\frac{}{(\iota x.x = a) = a}\,\mathsf{the\_eq}$$

- HOL ist *klassisch*:

$$\frac{}{(P = true) \vee (P = false)}\,\mathsf{true\_or\_false}$$

HOL: Die Basis-Axiome (Isabelle-Syntax)

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{refl}: & t = t \\
\mathsf{subst}: & [\![s = t;\ P(s)]\!] \Longrightarrow P(t) \\
\mathsf{ext}: & [\![\bigwedge x.fx = gx]\!] \Longrightarrow (\lambda\, x.fx) = (\lambda\, x.gx) \\
\mathsf{impl}: & [\![P \Longrightarrow Q]\!] \Longrightarrow P \longrightarrow Q \\
\mathsf{mp}: & [\![P \longrightarrow Q;\ P]\!] \Longrightarrow Q \\
\mathsf{iff}: & (P \longrightarrow Q) \longrightarrow (Q \longrightarrow P) \longrightarrow (P = Q) \\
\mathsf{the_eq}: & (\iota x.x = a) = a \\
\mathsf{true_or_false}: & (P = true) \vee (P = false)
\end{array}$$

HOL: Abgeleitete Operatoren

$$\begin{array}{rcl}
true & \equiv & (\lambda\, x.x) = (\lambda\, x.x) \\
\forall\, P & \equiv & (P = \lambda\, x.true) \\
\exists\, P & \equiv & \forall\, Q.(\forall\, x.Px \longrightarrow Q) \longrightarrow Q \\
false & \equiv & \forall\, P.P \\
\neg P & \equiv & P \longrightarrow false \\
P \wedge Q & \equiv & \forall\, R.(P \longrightarrow Q \longrightarrow R) \longrightarrow R \\
P \vee Q & \equiv & \forall\, R.(P \longrightarrow R) \longrightarrow (Q \longrightarrow R) \longrightarrow R \\
if\ \ P\ then\, x\ else\ y & \equiv & \iota z.(P = true \longrightarrow z = x) \wedge (P = false \longrightarrow z = y)
\end{array}$$

Konservative Erweiterung

- *Signatur* $\Sigma = \langle T, \Omega \rangle$
  - Typdeklarationen T, Operationen Ω
  - Definiert die *Syntax*: Terme T_Σ über Σ
- *Theorie* $\mathcal{T}h = \langle \Sigma, \mathcal{A}x \rangle$
  - Axiome $\mathcal{A}x$
  - Theoreme: $Thm(\mathcal{T}h) \stackrel{def}{=} \{t \mid \mathcal{T}h \vdash t\}$
- Erweiterung: $\Sigma \subseteq \Sigma'$, $\mathcal{T}h \subseteq \mathcal{T}h'$
  - Konservativ gdw. $t \in Thm(\mathcal{T}h')$, $t \in T_\Sigma$ dann $t \in Thm(\mathcal{T}h)$
  - Keine *neuen* Theoreme über *alte* Symbole