Vorlesung vom 07.11.05: Prädikatenlogik erster Stufe (Vom Umgang mit Quantoren)

Fahrplan

- Logik mit *Quantoren*
- Von Aussagenlogik zur Prädikatenlogik
- *Natürliches Schließen* mit Quantoren
- Die Notwendigkeit von Logik höherer Stufe

Wo sind wir?

- Aussagenlogik
- *Prädikatenlogik*
- Logik höherer Stufe
- Isabelle/HOL

Prädikatenlogik

- *Beschränkung* der Aussagenlogik:

  Alle Quadratzahlen sind positiv, 9 ist eine Quadratzahl, also ist 9 positiv.

  Nicht in Aussagenlogk *formalisierbar*.
- *Ziel*: Formalisierung von Aussagen wie

  Alle Zahlen sind ein Produkt von Primfaktoren.

  Es gibt keine größte Primzahl.

Erweiterung der Sprache

- *Terme* beschreiben die zu formalisierenden Objekte.
- *Formeln* sind logische Aussagen.
- Unser *Alphabet*:
  - *Prädikatensymbole*: $P_1, \ldots, P_n, \bullet =$ mit *Arität* $ar(P_i) \in \mathbb{N}$, $ar(\bullet =) = 2$
  - *Funktionssymbole*: $f_1, \ldots, f_m$ mit *Arität* $ar(t_i) \in \mathbb{N}$
  - Menge X von *Variablen* (abzählbar viele)
  - *Konnektive*: $\wedge, \longrightarrow, false, \forall$, *abgeleitet*: $\vee, \longleftrightarrow, \neg, \longleftrightarrow, \exists$

Terme

Menge $\mathcal{T}erm$ der *Terme* gegeben durch:

- Variablen: $X \subseteq \mathcal{T}erm$
- Funktionssymbol f mit $ar(f) = n$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}erm$, dann $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}erm$
- Sonderfall: $n = 0$, dann ist f eine *Konstante*, $f \in \mathcal{T}erm$

Formeln

Menge $\mathcal{F}orm$ der *Formeln* gegeben durch:

- $false \in \mathcal{F}orm$
- Wenn $\phi \in \mathcal{F}orm$, dann $\neg\phi \in \mathcal{F}orm$
- Wenn $\phi, \psi \in \mathcal{F}orm$, dann $\phi \wedge \psi \in \mathcal{F}orm, \quad \phi \vee \psi \in \mathcal{F}orm,$
  $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{F}orm, \quad \phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{F}orm$
- Wenn $\phi \in \mathcal{F}orm, x \in X$, dann $\forall\, x.\phi \in \mathcal{F}orm, \exists\, x.\phi \in \mathcal{F}orm$
- Prädikatensymbol p mit $ar(p) = m$ und $t_1, \ldots, t_m \in \mathcal{T}erm$, dann $p(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{F}orm$
  - Sonderfall: $t_1, t_2 \in \mathcal{T}erm$, dann $t_1 \bullet = t_2 \in \mathcal{F}orm$

Beispielaussagen

- Alle Zahlen sind gerade oder ungerade.
- Keine Zahl ist gerade und ungerade.
- Es gibt keine größte Primzahl.
- Für jede Primzahl gibt es eine, die größer ist.
- Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x_0, gdw. es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x mit $\mid x - x_0 \mid < \delta$ gilt $\mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon$.

Freie und gebundene Variable

- Variablen in $t \in \mathcal{T}erm, p \in \mathcal{F}orm$ sind frei, gebunden, oder bindend.
  - x bindend in $\forall\, x.\phi$, $\exists\, x.\psi$
  - Für $\forall\, x.\phi, \exists\, \phi x$ ist x in Teilformel ϕ gebunden
  - Ansonsten ist x frei
- $FV(\phi)$: Menge der *freien* Variablen in ϕ
- Beispiel:

$$(q(x) \vee \exists\, x.\forall\, y.p(f(x), z) \wedge q(a)) \vee \forall\, r(x, z, g(x))$$

Natürliches Schließen mit Quantoren

$$\frac{\phi}{\forall\, x.\phi}\forall\, I \quad (*) \qquad\qquad \frac{\forall\, x.\phi}{\phi\left[\frac{t}{x}\right]}\forall\, E \quad (\dagger)$$

(*) *Eigenvariablenbedingung:*
x nicht *frei* in offenen Vorbedingungen von ϕ

($\dagger$) Ggf. *Umbenennung* in T Substitution

- *Gegenbeispiele* für verletzte Seitenbedingungen

Ersetzung

- $t\left[\frac{s}{x}\right]$ ist Ersetzung von x durch s in t
- Definiert durch strukturelle Induktion:

$$\begin{aligned}
y\left[\tfrac{s}{x}\right] &\stackrel{def}{=} \begin{cases} s & x = y \\ y & x \neq y \end{cases} \\
f(t_1, \ldots, t_n)\left[\tfrac{s}{x}\right] &\stackrel{def}{=} f(t_1\left[\tfrac{s}{x}\right], \ldots, t_n\left[\tfrac{s}{x}\right]) \\
\mathit{false}\left[\tfrac{s}{x}\right] &\stackrel{def}{=} \mathit{false} \qquad (\phi \wedge \psi)\left[\tfrac{s}{x}\right] \stackrel{def}{=} \phi\left[\tfrac{s}{x}\right] \wedge \psi\left[\tfrac{s}{x}\right] \qquad \ldots \\
p(t_1, \ldots, t_n)\left[\tfrac{s}{x}\right] &\stackrel{def}{=} p(t_1\left[\tfrac{s}{x}\right], \ldots, t_n\left[\tfrac{s}{x}\right]) \\
(\forall\, y.\phi)\left[\tfrac{s}{x}\right] &\stackrel{def}{=} \begin{cases} \forall\, y.\phi & x = y \\ \forall\, y.(\phi\left[\tfrac{s'}{x}\right]) & x \neq y, \text{ mit } s' \stackrel{def}{=} s\left[\tfrac{y'}{y}\right], \\ & y' \textit{ frische } \text{Variable} \end{cases}
\end{aligned}$$

Der Existenzquantor

$$\exists\, x.\phi \stackrel{def}{=} \neg\forall\, x.\neg\phi$$

$$\frac{\phi\left[\frac{t}{x}\right]}{\exists\, x.\phi}\exists\, I \quad (\dagger) \qquad\qquad \frac{\exists\, x.\phi \qquad \begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\psi}\exists\, E \quad (*)$$

(*) *Eigenvariablenbedingung:*
x nicht frei in ψ, oder einer offenenen Vorbedingung außer ϕ

($\dagger$) Ggf. Umbenennung durch Substitution

Regeln für die Gleichheit

- *Reflexivität*, *Symmetrie*, *Transitivität*:

$$\frac{}{x = x}\text{refl} \qquad \frac{x = y}{y = x}\text{sym} \qquad \frac{x = y \quad y = z}{x = z}\text{trans}$$

- *Kongruenz*:

$$\frac{x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n}{f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)}\text{conf}$$

- *Substitutivität*:

$$\frac{x_1 = y_1, \ldots, x_m = y_m \quad P(x_1, \ldots, x_n)}{P(y_1, \ldots, y_m)}\text{subst}$$

Zusammenfassung

- Prädikatenlogik: Erweiterung der Aussagenlogik um
  - Konstanten- und Prädikatensymbole
  - Gleichheit
  - Quantoren
- Das natürliche Schließen mit Quantoren
  - Variablenbindungen — Umbenennungen bei Substitution
  - Eigenvariablenbedingung
- Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe:
  - z.B. Peano-Axiome
- Deshalb das nächste Mal: Logik höherer Stufe
  - Die ganze Mathematik in sieben Axiomen.