Vorlesung vom 31.10.05: Formale Logik und natürliches Schließen

Fahrplan

- Einführung in die *formale Logik*
- *Aussagenlogik*
  - Beispiel für eine *einfache Logik*
  - Guter *Ausgangspunkt*
- *Natürliches Schließen*
  - Wird auch von *Isabelle* verwendet.
- Buchempfehlung:

  Dirk van Dalen: *Logic and Structure*. Springer Verlag, 2004.

Formale Logik

- Ziel: *Formalisierung* von *Folgerungen* wie

Wenn es regnet, wird die Straße nass.	Nachts ist es dunkel.
Es regnet.	Es ist hell.
Also ist die Straße nass.	Also ist es nicht nachts.

- Eine *Logik* besteht aus
  - Einer *Sprache* $\mathcal{L}$ von *Formeln* (*Aussagen*)
  - *Schlußregeln* (*Folgerungsregeln*) auf diesen Formeln.

  Damit: *Gültige* ("wahre") Aussagen berechnen.

Beispiel für eine Logik

- *Sprache* $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$
- *Schlußregeln*:

$$\frac{\diamondsuit}{\clubsuit}\alpha \qquad \frac{\diamondsuit}{\spadesuit}\beta \qquad \frac{\clubsuit \quad \spadesuit}{\heartsuit}\gamma \qquad \frac{\begin{matrix}[\diamondsuit]\\ \vdots \\ \heartsuit\end{matrix}}{\heartsuit}\delta$$

- Beispielableitung: $\heartsuit$

Aussagenlogik

Sprache $\mathcal{Prop}$ gegeben durch:

- Variablen $V \subseteq \mathcal{Prop}$ (Menge V gegeben)
- $\mathit{false} \in \mathcal{Prop}$
- Wenn $\phi, \psi \in \mathcal{Prop}$, dann $\phi \wedge \psi \in \mathcal{Prop}$, $\phi \vee \psi \in \mathcal{Prop}$, $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{Prop}$, $\phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{Prop}$
- Wenn $\phi \in \mathcal{Prop}$, dann $\neg\phi \in \mathcal{Prop}$.

Wann ist eine Formel gültig?

- *Semantische* Gültigkeit $\models P$: *Wahrheitstabellen* etc.
  - Wird *hier* nicht weiter verfolgt.
- *Syntaktische* Gültigkeit $\vdash P$: *formale* Ableitung,
  - *Natürliches Schließen*
  - *Sequenzenkalkül*
  - Andere (*Hilbert-Kalkül*, *gleichungsbasierte Kalküle*, etc.)

Natürliches Schließen

- *Vorgehensweise*: Erst Kalkül nur für $\wedge, \longrightarrow, \mathit{false}$, dann *Erweiterung* auf *alle* Konnektive.
- Für jedes *Konnektiv*: *Einführungs-* und *Eliminitationsregel*
- NB: *konstruktiver Inhalt* der meisten Regeln

Natürliches Schließen — Die Regeln

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\wedge I \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\wedge E_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\wedge E_2$$

$$\frac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\phi \longrightarrow \psi}\longrightarrow I \qquad \frac{\phi \quad \phi \longrightarrow \psi}{\psi}\longrightarrow E$$

$$\frac{\mathit{false}}{\phi}\mathit{false} \qquad \frac{\begin{matrix}[\phi \longrightarrow \mathit{false}]\\ \vdots \\ \mathit{false}\end{matrix}}{\phi}\text{raa}$$

Konsistenz

Def: Γ *konsistent* gdw. $\Gamma \not\vdash \mathit{false}$

Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Γ konsistent

(ii) Es gibt kein ϕ so dass $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$

(iii) Es gibt ein ϕ so dass $\Gamma \not\vdash \phi$

Satz: Aussagenlogik mit natürlichem Schließen ist konsistent.

Die fehlenden Konnektive

- Einführung als *Abkürzung:*

$$\neg\phi \stackrel{def}{=} \phi \longrightarrow \mathit{false}$$

$$\phi \vee \psi \stackrel{def}{=} \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

$$\phi \longleftrightarrow \psi \stackrel{def}{=} (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \phi)$$

- Ableitungsregeln als *Theoreme*.

Die fehlenden Schlußregeln

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\vee I_1 \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\vee I_2 \qquad \frac{\phi \vee \psi \quad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\vee E$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \mathit{false}\end{array}}{\neg\phi}\neg I \qquad \frac{\phi \quad \neg\phi}{\mathit{false}}\neg E$$

$$\frac{\phi \longrightarrow \psi \quad \psi \longrightarrow \phi}{\phi \longleftrightarrow \psi}\longleftrightarrow I \qquad \frac{\phi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\psi}\longleftrightarrow E_1 \qquad \frac{\psi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\phi}\longleftrightarrow E_2$$

Zusammenfassung

- Formale Logik *formalisiert* das (natürlichsprachliche) Schlußfolgern
- *Logik*: Aussagen plus Schlußregeln (Kalkül)
- *Aussagenlogik*: Aussagen mit $\wedge$, $\longrightarrow$, false
  - $\neg$, $\vee$, $\longleftrightarrow$ als *abgeleitete Operatoren*
- Natürliches *Schließen*: intuitiver Kalkül
- Aussagenlogik *konsistent*, *vollständig*, *entscheidbar*.
- Nächstes Mal: *Quantoren*, *HOL*.