

Formale Modellierung
Vorlesung 6 vom 26.05.14: Beschreibungslogiken

Serge Autexier & Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2014

Fahrplan

- ▶ Teil I: Formale Logik
 - ▶ Einführung
 - ▶ Aussagenlogik: Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
 - ▶ Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
 - ▶ Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
 - ▶ Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
 - ▶ Beschreibungslogiken
 - ▶ FOL mit induktiven Datentypen
 - ▶ FOL mit Induktion und Rekursion
 - ▶ Die Unvollständigkeitssätze von Gödel
- ▶ Teil II: Spezifikation und Verifikation

Beschreibungslogiken

- ▶ Entscheidbare Fragmente von FOL
- ▶ Zusammenhang zu Notation
- ▶ Beschreibungslogik, ALC Logik
- ▶ ND Kalkül
- ▶ Korrektheit & Vollständigkeit
- ▶ Logik ALCQI
- ▶ Anwendung
- ▶ ND Kalkül

Entscheidbare Fragmente

► Aussagenlogik

$$\begin{aligned} \mathcal{Form}_{\Sigma} &:= \perp | \top | A | \neg \mathcal{Form}_{\Sigma} \\ &| \mathcal{Form}_{\Sigma} \wedge \mathcal{Form}_{\Sigma} | \mathcal{Form}_{\Sigma} \vee \mathcal{Form}_{\Sigma} \\ &| \mathcal{Form}_{\Sigma} \longrightarrow \mathcal{Form}_{\Sigma} | \mathcal{Form}_{\Sigma} \longleftrightarrow \mathcal{Form}_{\Sigma} \end{aligned}$$

► Prädikatenlogik

$$\begin{aligned} \mathcal{Term}_{\Sigma} &:= f(\mathcal{Term}_{\Sigma}, \dots, \mathcal{Term}_{\Sigma}) \\ \mathcal{Form}_{\Sigma} &:= \perp | \top | P(\mathcal{Term}_{\Sigma}, \dots, \mathcal{Term}_{\Sigma}) | \neg \mathcal{Form}_{\Sigma} \\ &| \mathcal{Form}_{\Sigma} \wedge \mathcal{Form}_{\Sigma} | \mathcal{Form}_{\Sigma} \vee \mathcal{Form}_{\Sigma} \\ &| \mathcal{Form}_{\Sigma} \longrightarrow \mathcal{Form}_{\Sigma} | \mathcal{Form}_{\Sigma} \longleftrightarrow \mathcal{Form}_{\Sigma} \\ &| \forall x. \mathcal{Form}_{\Sigma} | \exists x. \mathcal{Form}_{\Sigma} \end{aligned}$$

Entscheidbare Fragmente

► Aussagenlogik

$$\begin{aligned} \mathcal{Form}_{\Sigma} &:= \perp \mid \top \mid A \mid \neg \mathcal{Form}_{\Sigma} \\ &\quad \mid \mathcal{Form}_{\Sigma} \wedge \mathcal{Form}_{\Sigma} \mid \mathcal{Form}_{\Sigma} \vee \mathcal{Form}_{\Sigma} \\ &\quad \mid \mathcal{Form}_{\Sigma} \longrightarrow \mathcal{Form}_{\Sigma} \mid \mathcal{Form}_{\Sigma} \longleftrightarrow \mathcal{Form}_{\Sigma} \end{aligned}$$

► Beschreibungslogik

- Nur ein- und zweistellige Prädikate,
- Nur 2 Variablen für Quantoren linear verwendet, nur Konstanten für Termen
- $\longrightarrow$ und $\longleftrightarrow$ nie unterhalb von anderen Konnektiven

► Prädikatenlogik

$$\begin{aligned} \mathcal{Term}_{\Sigma} &:= f(\mathcal{Term}_{\Sigma}, \dots, \mathcal{Term}_{\Sigma}) \\ \mathcal{Form}_{\Sigma} &:= \perp \mid \top \mid P(\mathcal{Term}_{\Sigma}, \dots, \mathcal{Term}_{\Sigma}) \mid \neg \mathcal{Form}_{\Sigma} \\ &\quad \mid \mathcal{Form}_{\Sigma} \wedge \mathcal{Form}_{\Sigma} \mid \mathcal{Form}_{\Sigma} \vee \mathcal{Form}_{\Sigma} \\ &\quad \mid \mathcal{Form}_{\Sigma} \longrightarrow \mathcal{Form}_{\Sigma} \mid \mathcal{Form}_{\Sigma} \longleftrightarrow \mathcal{Form}_{\Sigma} \\ &\quad \mid \forall x. \mathcal{Form}_{\Sigma} \mid \exists x. \mathcal{Form}_{\Sigma} \end{aligned}$$

Beschreibungslogik

- ▶ Nur ein- und zweistellige Prädikate,

$\text{Parent}(\textit{Steve})$

$\text{hasChild}(\textit{Steve}, \textit{John})$

- ▶ Nur 2 Variablen für Quantoren linear verwendet, nur Konstanten für Termen

$\forall x. \text{Parent}(x) \longleftrightarrow \text{Human}(x) \wedge$

$\exists y. \text{hasChild}(x, y) \wedge \text{Human}(y)$

- ▶ $\longrightarrow$ und $\longleftrightarrow$ nie unterhalb von anderen Konnektiven

Beschreibungslogik

- ▶ Nur ein- und zweistellige Prädikate,

$\text{Parent}(\text{Steve})$

$\text{hasChild}(\text{Steve}, \text{John})$

- ▶ Nur 2 Variablen für Quantoren linear verwendet, nur Konstanten für Termen

$\forall x. \text{Parent}(x) \longleftrightarrow \text{Human}(x) \wedge$
 $\exists y. \text{hasChild}(x, y) \wedge \text{Human}(y)$

- ▶ $\longrightarrow$ und $\longleftrightarrow$ nie unterhalb von anderen Konnektiven

- ▶ Nur ein- und zweistellige Prädikate,

$\underbrace{\text{Parent}}_{\text{Konzepte}}(\text{Steve}), \underbrace{\text{hasChild}}_{\text{Rollen}}(\text{Steve}, \text{John})$

- ▶ Nur 2 Variablen für Quantoren linear verwendet, nur Konstanten für Termen

$\text{Parent} \equiv \text{Human} \sqcap$
 $\exists \text{hasChild} . \text{Human}$

- ▶ $\top, \perp, \wedge, \vee, \longrightarrow$ und $\longleftrightarrow$ werden zu $\top, \perp, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq$ und $\equiv$

ALC-Formalisierungen

- ▶ Menge aller ALC-Formeln ist ϕ_c
- ▶ Wird verwendet um Weltwissen zu beschreiben
- ▶ Grundlage von OWL, RDF (Semantic Web)
- ▶ Werkzeugunterstützung Protégé zum Beispiel
- ▶ Formalisierung besteht aus **Terminologie** (TBOX) und **Annahmen** (Assertions, ABOX):
 - ▶ TBOX:
 - ▶ Inklusionen $C \sqsubseteq D$
 - ▶ Definitionen $C \equiv \alpha$, C Name
 - ▶ Es darf maximal eine Definition für einen Namen geben
 - ▶ ABOX:

Parent(Steve), hasChild(Steve, John)

Beispiel TBOX

Man $\sqsubseteq$ *Human*

Woman $\sqsubseteq$ *Human*

Parent $\equiv$ *Human* $\sqcap \exists$ hasChild . *Human*

Father $\equiv$ *Parent* $\sqcap$ *Man*

Mother $\equiv$ *Parent* $\sqcap$ *Woman*

Familie von Beschreibungslogiken

- ▶ ALC: nur atomare Rollen
- ▶ ALCN: Zahleneinschränkungen für Rollen, unqualifiziert

$$\leq nR, \geq nR$$

- ▶ ALCQ: Zahleneinschränkungen für Rollen, qualifiziert

$$\leq nR.C, \geq nR.C$$

- ▶ ALCI: Inverse Rollen

$$\forall R^-.C, \exists R^-.C, \dots$$

Semantik

Interpretation $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, _^{\mathcal{I}})$

- ▶ $\Delta^{\mathcal{I}}$ domäne (Universum), nicht-leer.
- ▶ $_^{\mathcal{I}}$ Abbildung von
 - ▶ Individuen auf Elemente von $\Delta^{\mathcal{I}}$,
 - ▶ Konzepten auf Teilmengen von $\Delta^{\mathcal{I}}$,
 - ▶ Rollen auf Teilmengen von $\Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$

Abbildung

$$\top^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$$

$$\perp^{\mathcal{I}} = \emptyset$$

$$(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$$

$$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$$

$$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$$

$$(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b.(a, b) \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}}\}$$

$$(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall b.(a, b) \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow b \in C^{\mathcal{I}}\}$$

Abbildung

$$(\leq nR)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid |\{b \mid (a, b) \in R^{\mathcal{I}}\}| \leq n\}$$

$$(\geq nR)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid |\{b \mid (a, b) \in R^{\mathcal{I}}\}| \geq n\}$$

$$(\leq nR.C)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid |\{b \mid (a, b) \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}}\}| \leq n\}$$

$$(\geq nR.C)^{\mathcal{I}} = \{a \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid |\{b \mid (a, b) \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}}\}| \geq n\}$$

Modell

Sei $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, _^{\mathcal{I}})$ eine Interpretation.

- ▶ $\mathcal{I} \models C(a)$ gdw. $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$
- ▶ $\mathcal{I} \models R(a, b)$ gdw. $(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}$

ND Kalkül für ALC

Alexandre Rademaker. *A Proof Theory for Description Logics*, PhD Thesis, PUC-Rio, Brasil, March 2010

Axiomatisierung von ALC

$$\forall R.(\alpha \sqcap \beta) \equiv \forall R.\alpha \sqcap \forall R.\beta \quad (1)$$

$$\forall R.\top \equiv \top \quad (2)$$

$$\exists R.(\alpha \sqcup \beta) \equiv \exists R.\alpha \sqcup \exists R.\beta \quad (3)$$

$$\exists R.\bot \equiv \bot \quad (4)$$

► Einige Fakten

- Falls $\vdash \alpha$ gilt, dann auch $\vdash \forall R.\alpha$ (Necessitation)
- If $C \sqsubseteq D$ then $\exists R.C \sqsubseteq \exists R.D$
- If $C \sqsubseteq D$ then $\forall R.C \sqsubseteq \forall R.D$

Labelled Formel

$$L := \forall R, L \mid \exists R, L \mid \epsilon$$

$$\phi|_c := {}^L\phi c$$

Aus labelled Formel kann immer die normale Formel wieder berechnet werden

$$\sigma({}^\epsilon\alpha) = \alpha$$

$$\sigma({}^{\forall R, L}\alpha) = \forall R. \sigma({}^L\alpha)$$

$$\sigma({}^{\exists R, L}\alpha) = \exists R. \sigma({}^L\alpha)$$

► Notation

$${}^L\forall\alpha, {}^L\exists\alpha,$$

Wenn alle Labels der Form $\forall R$ bzw. $\exists R$ sind

Kalkül des natürlichen Schließen für ALC

$$\frac{L^\forall(\alpha \sqcap \beta)}{L^\forall \alpha} \sqcap\text{-e}$$

$$\frac{L^\forall(\alpha \sqcap \beta)}{L^\forall \beta} \sqcap\text{-e}$$

$$\frac{L^\forall \alpha \quad L^\forall \beta}{L^\forall(\alpha \sqcap \beta)} \sqcap\text{-i}$$

$$\frac{L^\exists(\alpha \sqcup \beta) \quad \begin{array}{c} [L^\exists \alpha] \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} [L^\exists \beta] \\ \vdots \\ \gamma \end{array}}{\gamma} \sqcup\text{-e}$$

$$\frac{L^\exists \alpha}{L^\exists(\alpha \sqcup \beta)} \sqcup\text{-i}$$

$$\frac{L^\exists \beta}{L^\exists(\alpha \sqcup \beta)} \sqcup\text{-i}$$

Kalkül des natürlichen Schließen für ALC

$$\frac{L\alpha \quad \neg L\neg\alpha}{\perp} \neg\text{-e}$$

$$\frac{\begin{array}{c} [L\alpha] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg L\neg\alpha} \neg\text{-i}$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg L\neg\alpha] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{L\alpha} \perp_c$$

$$\frac{L\exists R.\alpha}{L,\exists R\alpha} \exists\text{-e}$$

$$\frac{L,\exists R\alpha}{L\exists R.\alpha} \exists\text{-i}$$

$$\frac{L\forall R.\alpha}{L,\forall R\alpha} \forall\text{-e}$$

Kalkül des natürlichen Schließen für ALC

$$\begin{array}{c}
 \frac{L, \forall R \alpha}{L \forall R. \alpha} \forall\text{-i} \\
 \\
 \frac{L_1 \alpha \quad L_1 \alpha \sqsubseteq L_2 \beta}{L_2 \beta} \sqsubseteq\text{-e} \quad \frac{\begin{array}{c} [L_1 \alpha] \\ \vdots \\ L_2 \beta \end{array}}{L_1 \alpha \sqsubseteq L_2 \beta} \sqsubseteq\text{-i} \\
 \\
 \frac{L \alpha}{\forall R, L \alpha} \text{Gen}
 \end{array}$$

Korrektheit & Vollständigkeit

- ▶ $ND_{\mathcal{ALC}}$ ist korrekt
- ▶ $ND_{\mathcal{ALC}}$ ist vollständig
- ▶ Gegeben Annahmen T und zu beweisende ALC Formel α und ein voll-expandierter ND-Ableitungsbaum P :
 - ▶ Falls P kein Beweis ist, dann kann daraus ein Gegenbeispiel für $T \vdash \alpha$ extrahiert werden.
 - ▶ Entscheidbarkeit

Die Logik ALCQI

Familie von Beschreibungslogiken

- ▶ ALC: nur atomare Rollen
- ▶ ALCN: Zahleneinschränkungen für Rollen, unqualifiziert

$$\leq nR, \geq nR$$

- ▶ ALCQ: Zahleneinschränkungen für Rollen, qualifiziert

$$\leq nR.C, \geq nR.C$$

- ▶ ALCI: Inverse Rollen

$$\forall R^-.C, \exists R^-.C, \dots$$

Die Logik ALCQI

- Konzepte und Rollen

$$\begin{aligned}\alpha &:= \perp \mid A \mid \neg\alpha \mid \alpha_1 \sqcap \alpha_2 \mid \alpha_1 \sqcup \alpha_2 \mid \forall P.\alpha \mid \exists P.\alpha \mid \leq nP.\alpha \mid \geq nP.\alpha \\ P &:= R \mid R^-\end{aligned}$$

- TBox wie gehabt, ABox auch
- Labeled Formeln

$$\begin{aligned}L &:= \forall P, L \mid \exists P, L \mid \leq nP, L \mid \geq nP, L \mid \epsilon \\ \phi_{cl} &:= {}^L\phi_c\end{aligned}$$

Kalkül des natürlichen Schließen für ALCQI

$$\frac{L^{\forall \geq}(\alpha \sqcap \beta)}{L^{\forall \geq} \alpha} \sqcap\text{-e}$$

$$\frac{L^{\forall \geq}(\alpha \sqcap \beta)}{L^{\forall \geq} \beta} \sqcap\text{-e}$$

$$\frac{L^{\forall \leq} \alpha \quad L^{\forall \leq} \beta}{L^{\forall \leq}(\alpha \sqcap \beta)} \sqcap\text{-i}$$

$$\frac{L^{\exists \leq}(\alpha \sqcup \beta) \quad \begin{array}{c} [L^{\exists \leq} \alpha] \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} [L^{\exists \leq} \beta] \\ \vdots \\ \gamma \end{array}}{\gamma} \sqcup\text{-e}$$

$$\frac{L^{\exists \geq} \alpha}{L^{\exists \geq}(\alpha \sqcup \beta)} \sqcup\text{-i}$$

$$\frac{L^{\exists \geq} \beta}{L^{\exists \geq}(\alpha \sqcup \beta)} \sqcup\text{-i}$$

Kalkül des natürlichen Schließen für ALCQI

$$\frac{L^{\forall\exists}\alpha \quad \neg L^{\forall\exists}\neg\alpha}{\perp} \neg\text{-e}$$

$$\frac{L\exists R.\alpha}{L,\exists R\alpha} \exists\text{-e}$$

$$\frac{\begin{array}{c} [L^{\forall\exists}\alpha] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg L^{\forall\exists}\neg\alpha} \neg\text{-i}$$

$$\frac{L,\exists R\alpha}{L\exists R.\alpha} \exists\text{-i}$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg L^{\forall\exists}\neg\alpha] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{L^{\forall\exists}\alpha} \perp\text{c}$$

$$\frac{L\forall R.\alpha}{L,\forall R\alpha} \forall\text{-e}$$

Kalkül des natürlichen Schließen für ALCQI

$$\frac{L, \forall R. \alpha}{L \forall R. \alpha} \forall\text{-i}$$

$$\frac{L \leq nR. \alpha}{L, \leq nR. \alpha} \leq\text{-e}$$

$$\frac{L, \leq nR. \alpha}{L \leq nR. \alpha} \leq\text{-i}$$

$$\frac{L \geq nR. \alpha}{L, \geq nR. \alpha} \geq\text{-e}$$

$$\frac{L, \geq nR. \alpha}{L \geq nR. \alpha} \geq\text{-i}$$

$$\frac{\exists R, L. \alpha}{\geq 1R, L. \alpha} \geq \exists$$

$$\frac{\geq nR, L. \alpha}{\exists R, L. \alpha} \exists \geq (n \geq 1)$$

Kalkül des natürlichen Schließen für ALCQI

$$\frac{\geq mR, L\alpha}{\geq nR, L\alpha} - \geq (m \geq n)$$

$$\frac{\leq mR, L\alpha}{\leq nR, L\alpha} + \geq (m \leq n)$$

$$\frac{L\alpha}{\forall R, L\alpha} \text{ Gen}$$

$$\frac{L_1\alpha \quad L_1\alpha \sqsubseteq L_2\beta}{L_2\beta} \sqsubseteq \text{-e}$$

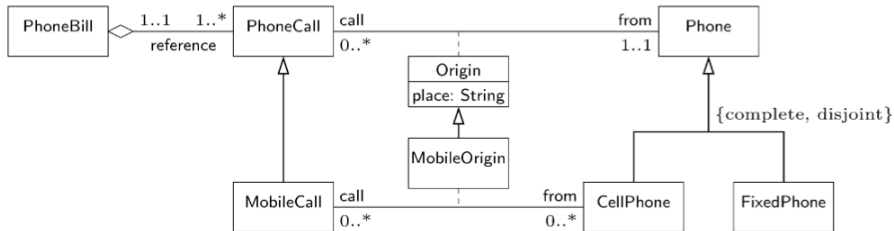
$$\frac{\begin{array}{c} [L_1\alpha] \\ \vdots \\ L_2\beta \end{array}}{L_1\alpha \sqsubseteq L_2\beta} \sqsubseteq \text{-i}$$

$$\frac{\exists R, L_1\alpha \sqsubseteq L_2\beta}{L_1\alpha \sqsubseteq \forall R^-, L_2\beta} \text{ inv}$$

Korrektheit und Vollständigkeit

- ▶ ND_{ALCQI} ist korrekt
- ▶ ND_{ALCQI} ist vollständig
- ▶ Gegeben Annahmen T und zu beweisende ALCQI Formel α und ein voll-expandierter ND-Abeltingsbaum P :
 - ▶ Falls P kein Beweis ist, dann kann daraus ein Gegenbeispiel für $T \vdash \alpha$ extrahiert werden.
 - ▶ Entscheidbarkeit

Anwendung: UML



Anwendung: UML Diagramm als TBOX

Origin $\sqsubseteq \forall \text{place.String}$

Origin $\sqsubseteq \exists \text{place.T} \sqcap (\leq 1 \text{ place})$

Origin $\sqsubseteq \exists \text{call.PhoneCall} \sqcap (\leq 1 \text{ call}) \sqcap \exists \text{from.Phone} \sqcap (\leq 1 \text{ from})$

MobileOrigin $\sqsubseteq \exists \text{call.MobileCall} \sqcap (\leq 1 \text{ call}) \sqcap \exists \text{from.CellPhone} \sqcap (\leq 1 \text{ from})$

PhoneCall $\sqsubseteq (\geq 1 \text{ call}^{\neg}.\text{Origin}) \sqcap (\leq 1 \text{ call}^{\neg}.\text{Origin})$

$\top \sqsubseteq \forall \text{reference}^{\neg}.\text{PhoneBill} \sqcap \forall \text{reference.PhoneCall}$

PhoneBill $\sqsubseteq (\geq 1 \text{ reference}^{\neg})$

PhoneCall $\sqsubseteq (\geq 1 \text{ reference}) \sqcap (\leq 1 \text{ reference})$

MobileCall $\sqsubseteq \text{PhoneCall}$

MobileOrigin $\sqsubseteq \text{Origin}$

CellPhone $\sqsubseteq \text{Phone}$

FixedPhone $\sqsubseteq \text{Phone}$

CellPhone $\sqsubseteq \neg \text{FixedPhone}$

Phone $\sqsubseteq \text{CellPhone} \sqcup \text{FixedPhone}$

Anwendung: Beweis von Eigenschaften des UML Diagramms

$$\frac{\frac{\frac{[\geq 2 \text{ c}^-. \text{MO}]^2}{\geq 2 \text{ c}^-. \text{MO} \sqsubseteq \geq 2 \text{ c}^-. 0}}{\geq 2 \text{ c}^-. 0} \quad \frac{\frac{\frac{[\text{MC}]^1 \quad \text{MC} \sqsubseteq \text{PC}}{\text{PC}} \quad \frac{\text{PC} \sqsubseteq \geq 1 \text{ c}^-. 0 \sqcap \leq 1 \text{ c}^-. 0}{\geq 1 \text{ c}^-. 0 \sqcap \leq 1 \text{ c}^-. 0}}{\leq 1 \text{ c}^-. 0}}{\frac{\frac{\perp}{\neg \geq 2 \text{ c}^-. \text{MO}} 2}{\text{MC} \sqsubseteq \neg \geq 2 \text{ c}^-. \text{MO}} 1}$$

- ▶ ND-Beweis, dass jeder *MobileCall* maximal einen *MobileOrigin* hat.

Anwendung: Konsistenz des UML Diagramms

$$\frac{\frac{\text{Cell} \sqsubseteq \neg \text{Fixed} \quad [\text{Cell}]^1}{\neg \text{Fixed}} \quad \frac{\text{Cell} \sqsubseteq \text{Fixed} \quad [\text{Cell}]^1}{\text{Fixed}}}{\frac{\perp}{\text{Cell} \sqsubseteq \perp}^1}$$

- ▶ Neues Axiom $\text{CellPhone} \sqsubseteq \text{FixedPhone}$
- ▶ Inkonsistenz

Eigenschaften von Beschreibungslogiken



Complexity of reasoning in Description Logics

Note: the information here is (always) incomplete and [updated](#) often

Base description logic: *Attributive Language with Complements*

$ALC ::= \perp \mid T \mid A \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \exists R.C \mid \forall R.C$



Concept constructors: ☐ F – functionality²: $(\leq 1 R)$ ☐ N – (unqualified) number restrictions: $(\geq n R), (\leq n R)$ ☐ Q – qualified number restrictions: $(\geq n R.C), (\leq n R.C)$ ☐ O – nominals: $\{a\}$ or $\{a_1, \dots, a_n\}$ ("one-of") ☐ μ – least fixpoint operator: $\mu X.C$ Forbid complex roles⁵ in number restrictions⁶	Role constructors: trans reg ☐ I – role inverse: R^{-} ☐ $\cap$ – role intersection³: $R \sqcap S$ ☐ $\cup$ – role union: $R \sqcup S$ ☐ $\neg$ – role complement: $\neg R$ full ☐ $\circ$ – role chain (composition): $R \circ S$ ☐ $*$ – reflexive-transitive closure⁴: R^* ☐ id – concept identity: $id(C)$
TBox (concept axioms): ☒ empty TBox ☐ acyclic TBox ($A \sqsubseteq C$, A is a concept name; no cycles) ☐ general TBox ($C \sqsubseteq D$, for arbitrary concepts C and D)	RBox (role axioms): OWL-Lite OWL-DL OWL 1.1 ☐ S – role transitivity: $Tr(R)$ ☐ H – role hierarchy: $R \sqsubseteq S$ ☐ R – complex role inclusions: $R \circ S \sqsubseteq R, R \circ S \sqsubseteq S$ ☐ S – some additional features (click to see them)
Reset You have selected a Description Logic: <i>ALC</i>	

Complexity⁷ of reasoning problems⁸

Concept satisfiability	PSpace-complete	• <u>Hardness</u> for <i>ALC</i>: see [80]. • <u>Upper bound</u> for <i>ALCQ</i>: see [12, Theorem 4.6].
ABox consistency	PSpace-complete	• <u>Hardness</u> follows from that for concept satisfiability. • <u>Upper bound</u> for <i>ALCQO</i>: see [12, Appendix A].
Important properties of the Description Logic		
Finite model property	Yes	<i>ALC</i> is a notational variant of the multi-modal logic K_M (cf. [72]), for which the finite model property can be found in [4, Sect. 2.3].

http://www.cs.man.ac.uk/~ezolin/dl/
http://dl.kr.org

Zusammenfassung und Nächste Woche

- ▶ Fragmente von Prädikatenlogik, die noch entscheidbar sind
- ▶ Beispiel: Familie der Beschreibungslogiken
- ▶ Grundlegende Beschreibungslogik ALC
- ▶ Fortgeschrittene Beschreibungslogik ALCQI
 - ▶ Modellierung von UML-Diagrammen
- ▶ Prädikatenlogik mit Induktion