

Formale Modellierung

Vorlesung 5 vom 19.05.14: Eigenschaften der Prädikatenlogik erster Stufe

Serge Autexier & Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2014

Fahrplan

- ▶ Teil I: Formale Logik
 - ▶ Einführung
 - ▶ Aussagenlogik: Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
 - ▶ Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
 - ▶ Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
 - ▶ **Konsistenz & Vollständigkeit von FOL**
 - ▶ Beschreibungslogiken
 - ▶ FOL mit induktiven Datentypen
 - ▶ FOL mit Induktion und Rekursion
 - ▶ Die Unvollständigkeitssätze von Gödel
- ▶ Teil II: Spezifikation und Verifikation

Das Tagesmenü

- ▶ Wiederholung: natürliches Schließen mit FOL
- ▶ Regeln für die Gleichheit
- ▶ Beispiele: Graphen, natürliche Zahlen
- ▶ Vollständigkeit von FOL

Natürliches Schließen mit Quantoren

$$\frac{\phi}{\forall x.\phi} \forall I \quad (*) \qquad \frac{\forall x.\phi}{\phi\left[\frac{t}{x}\right]} \forall E \quad (\dagger)$$

- ▶ (*) **Eigenvariablenbedingung:**
x nicht **frei** in offenen Vorbedingungen von ϕ (x beliebig)
- ▶ ($\dagger$) Ggf. **Umbenennung** durch Substitution
- ▶ **Gegenbeispiele** für verletzte Seitenbedingungen

Der Existenzquantor

$$\exists x.\phi \stackrel{def}{=} \neg \forall x.\neg \phi$$

$$\frac{\phi[x^t]}{\exists x.\phi} \exists I \quad (\dagger) \qquad \frac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \vdots \\ \exists x.\phi \quad \psi \end{array}}{\psi} \exists E \quad (*)$$

- ▶ (*) **Eigenvariablenbedingung:**
x nicht frei in ψ , oder einer offenen Vorbedingung außer ϕ
- ▶ ($\dagger$) Ggf. **Umbenennung** durch Substitution

Regeln für die Gleichheit

- Reflexivität, Symmetrie, Transitivität:

$$\overline{x = x} \text{ refl} \qquad \frac{x = y}{y = x} \text{ sym} \qquad \frac{x = y \quad y = z}{x = z} \text{ trans}$$

- Kongruenz:

$$\frac{x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n}{f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)} \text{ cong}$$

- Substitutivität:

$$\frac{x_1 = y_1, \dots, x_m = y_m \quad P(x_1, \dots, x_m)}{P(y_1, \dots, y_m)} \text{ subst}$$

Die natürlichen Zahlen

- ▶ Verschiedene **Axiomatisierungen**:
- ▶ **Presburger-Arithmetik**
 - ▶ 5 Axiome
 - ▶ Konsistent und vollständig
 - ▶ Entscheidbar (Aufwand $2^{2^{cn}}$, n Länge der Aussage)
 - ▶ Enthält Nichtstandardmodelle
- ▶ **Peano-Arithmetik**
 - ▶ 8 Axiome
 - ▶ Konsistent
 - ▶ Unvollständig (bzgl. Standard-Modellen)
 - ▶ Nicht entscheidbar

Wiederholung: Konsistenz und Vollständigkeit

- ▶ Korrektheit: wenn $\Gamma \vdash \phi$ dann $\Gamma \models \phi$
 - ▶ Beweis: Induktion über **Struktur** der Ableitung
- ▶ Konsistenz: wenn $\Gamma \models \phi$ dann $\Gamma \vdash \phi$
 - ▶ Beweis: Konstruktion der **maximal konsistenten Theorie**
 - ▶ Wenn Γ konsistent, gibt es Valuation die Γ wahr macht.
- ▶ Frage: Korrektheit und Konsistenz für Prädikatenlogik?

Korrektheit des natürlichen Schließens

Lemma 1 (Korrektheit von ND)

Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann $\Gamma \models \phi$

Beweis: **Induktion** über der Ableitung $\Gamma \vdash \phi$

- ▶ Neu hier: Fall $\forall x.\phi(x)$
- ▶ Beweis folgt durch Definition von $\mathfrak{A} \models \forall x.\phi(x)$

Vorbereitende Definitionen

Definition 2 (Theorien, Henkin-Theorien)

- (i) Eine **Theorie** ist eine unter Ableitbarkeit geschlossene Menge
 $T \subseteq \mathcal{Form}_{\Sigma}$
- (ii) **Henkin-Theorie**: Für jedes $\exists x.\phi(x) \in T$ gibt es **Witness** c mit
 $\exists x.\phi(x) \longrightarrow \phi(c) \in T$

Definition 3

T' ist **konservative** Erweiterung von T wenn $T' \cap \Sigma(T) = T$

- ▶ Alle Theoreme in T' in der Sprache von T sind schon Theoreme in T
- ▶ Beispiel: $\wedge, \longrightarrow, \perp$ und volle Aussagenlogik

Maximal konsistente Theorien

Definition 4

Sei T Theorie zur Signatur Σ :

$$\Sigma^* = \Sigma \cup \{c_\phi \mid \exists x.\phi(x) \in T\}$$

$$T^* = T \cup \{\exists x.\phi(x) \longrightarrow c_\phi \mid \exists x.\phi(x) \text{ geschlossen} \}$$

Lemma 5

T^* *konservative* Erweiterung von T

Konstruktion maximal konsistenter Theorien

Lemma 6

Sei T Theorie, und seien

$$T_0 = T, T_{n+1} = T_n^*, T_\omega = \bigcup_{n \geq 0} T_n$$

Dann ist T_ω eine Henkin-Theorie und konservativ über T

Lemma 7 (Lindenbaum)

Jede konsistente Theorie ist in einer maximal konsistenten Theorie enthalten (*Henkin-Erweiterung*)

Vollständigkeit von ND

Lemma 8 (Existenz von Modellen)

Wenn Γ konsistent, dann hat Γ ein Modell.

- ▶ Beweis: Maximal konsistente Henkin-Erweiterung als Modell
- ▶ **Herbrand-Modell**, universelles **Term-Modell**
- ▶ Korollar: Wenn $\Gamma \not\vdash \phi$, dann $\Gamma \not\models \phi$

Theorem 9 (Vollständigkeit von ND)

$\Gamma \vdash \phi$ gdw. $\Gamma \models \phi$

Entscheidbarkeit

Theorem 10 (Kompaktheit)

Γ hat ein Modell gdw. jede endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ hat ein Modell

- Aus Vollständigkeit folgt **nicht** Entscheidbarkeit:

Theorem 11 (Church)

Prädikatenlogik ist **unentscheidbar**.

- Beweis durch Kodierung von FOL in unentscheidbare Theorie

Zusammenfassung

- ▶ Natürliches Schließen in FOL: **Substitution** und **Eigenvariablenbedingung**.
- ▶ FOL ist **vollständig**, aber nicht **entscheidbar**