

Formale Modellierung
Vorlesung 4 vom 12.05.14: Prädikatenlogik erster Stufe

Serge Autexier & Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2014

Fahrplan

- ▶ Teil I: Formale Logik
 - ▶ Einführung
 - ▶ Aussagenlogik: Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
 - ▶ Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
 - ▶ Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
 - ▶ Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
 - ▶ Beschreibungslogiken
 - ▶ FOL mit induktiven Datentypen
 - ▶ FOL mit Induktion und Rekursion
 - ▶ Die Unvollständigkeitssätze von Gödel
- ▶ Teil II: Spezifikation und Verifikation

Das Tagesmenü

- ▶ Von Aussagenlogik zur Prädikatenlogik
- ▶ Logik mit **Quantoren**
- ▶ **Semantik** der Prädikatenlogik
- ▶ **Natürliches Schließen** mit Quantoren

Beschränkungen der Aussagenlogik

- ▶ **Beschränkung** der Aussagenlogik:
 - ▶ Eine Zahl n ist eine Primzahl genau dann wenn sie nicht 1 ist und nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

Beschränkungen der Aussagenlogik

- ▶ **Beschränkung** der Aussagenlogik:
 - ▶ Eine Zahl n ist eine Primzahl genau dann wenn sie nicht 1 ist und nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.
 - ▶ Eine Zahl m ist durch eine Zahl n teilbar genau dann wenn es eine Zahl p gibt, so dass $m = n \cdot p$.

Beschränkungen der Aussagenlogik

- ▶ **Beschränkung** der Aussagenlogik:
 - ▶ Eine Zahl n ist eine Primzahl genau dann wenn sie nicht 1 ist und nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.
 - ▶ Eine Zahl m ist durch eine Zahl n teilbar genau dann wenn es eine Zahl p gibt, so dass $m = n \cdot p$.
 - ▶ **Nicht** in Aussagenlogik **formalisierbar**.
- ▶ **Ziel**: Formalisierung von Aussagen wie
 - ▶ **Alle** Zahlen sind ein Produkt von Primfaktoren.
 - ▶ Es gibt **keine** größte Primzahl.

Beispiel: Make

The make utility automatically determines which pieces of a large program need to be recompiled, and issues commands to recompile them.

- ▶ Abhängigkeiten werden durch Regeln formalisiert
- ▶ Wenn Ziel älter ist als Abhängigkeit wird es neu erzeugt.

```
lecture-01.pdf: lecture-01.tex prelude.sty
                pdflatex lecture-01.tex
```

```
lecture-02.pdf: lecture-02.tex prelude.sty diagram.pdf
                pdflatex lecture-02.tex
```

```
diagram.pdf: diagram.svg
              inkscape -A diagram.pdf diagram.svg
```

Prädikatenlogik: Erweiterung der Sprache

- ▶ **Terme** beschreiben die zu formalisierenden Objekte.
- ▶ **Formeln** sind logische Aussagen.
- ▶ Eine **Signatur** Σ beschreibt Prädikate und Funktionen:
 - ▶ **Prädikatsymbole**: $P_1, \dots, P_n, \dot{=}$ mit **Arität** $ar(P_i) \in \mathbb{N}$, $ar(\dot{=}) = 2$
 - ▶ **Funktionssymbole**: f_1, \dots, f_m mit **Arität** $ar(t_i) \in \mathbb{N}$
- ▶ Menge X von **Variablen** (abzählbar viele)
- ▶ **Konnektive**: $\wedge, \longrightarrow, \perp, \forall$, **abgeleitet**: $\vee, \longleftarrow, \neg, \longleftrightarrow, \exists$
- ▶ Die **Trennung** zwischen **Termen** und **Formeln** ist der wesentliche Abstraktionsschritt in der Prädikatenlogik.

Terme

- ▶ Menge $Term_\Sigma$ der **Terme** (zur Signatur Σ) gegeben durch:
 - ▶ Variablen: $X \subseteq Term_\Sigma$
 - ▶ Funktionssymbol $f \in \Sigma$ mit $ar(f) = n$ und $t_1, \dots, t_n \in Term_\Sigma$, dann $f(t_1, \dots, t_n) \in Term_\Sigma$
 - ▶ Sonderfall: $n = 0$, dann ist f eine **Konstante**, $f \in Term_\Sigma$

Formeln

- ▶ Menge \mathcal{Form}_Σ der **Formeln** (zur Signatur Σ) gegeben durch:
 - ▶ $\perp \in \mathcal{Form}_\Sigma$
 - ▶ Wenn $\phi \in \mathcal{Form}_\Sigma$, dann $\neg\phi \in \mathcal{Form}_\Sigma$
 - ▶ Wenn $\phi, \psi \in \mathcal{Form}_\Sigma$, dann $\phi \wedge \psi \in \mathcal{Form}_\Sigma$, $\phi \vee \psi \in \mathcal{Form}_\Sigma$,
 $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{Form}_\Sigma$, $\phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{Form}_\Sigma$

Formeln

- ▶ Menge \mathcal{Form}_Σ der **Formeln** (zur Signatur Σ) gegeben durch:
 - ▶ $\perp \in \mathcal{Form}_\Sigma$
 - ▶ Wenn $\phi \in \mathcal{Form}_\Sigma$, dann $\neg\phi \in \mathcal{Form}_\Sigma$
 - ▶ Wenn $\phi, \psi \in \mathcal{Form}_\Sigma$, dann $\phi \wedge \psi \in \mathcal{Form}_\Sigma$, $\phi \vee \psi \in \mathcal{Form}_\Sigma$,
 $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{Form}_\Sigma$, $\phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{Form}_\Sigma$
 - ▶ Wenn $\phi \in \mathcal{Form}_\Sigma, x \in X$, dann $\forall x.\phi \in \mathcal{Form}_\Sigma, \exists x.\phi \in \mathcal{Form}_\Sigma$
 - ▶ Prädikatsymbol $p \in \Sigma$ mit $ar(p) = m$ und $t_1, \dots, t_m \in \mathcal{Term}_\Sigma$, dann $p(t_1, \dots, t_m) \in \mathcal{Form}_\Sigma$
 - ▶ Sonderfall: $t_1, t_2 \in \mathcal{Term}_\Sigma$, dann $t_1 \doteq t_2 \in \mathcal{Form}_\Sigma$

Freie und gebundene Variable

Definition (Freie und gebundene Variablen)

Variablen in $t \in \mathcal{Term}$, $p \in \mathcal{Form}$ sind **frei**, **gebunden**, oder **bindend**:

- (i) x **bindend** in $\forall x.\phi$, $\exists x.\psi$
- (ii) Für $\forall x.\phi$ und $\exists x.\phi$ ist x in Teilformel ϕ **gebunden**
- (iii) Ansonsten ist x **frei**

▶ $FV(\phi)$: Menge der **freien** Variablen in ϕ

▶ Beispiel:

$$(q(x) \vee \exists x.\forall y.p(f(x), z) \wedge q(a)) \vee \forall r(x, z, g(x))$$

▶ Formel (Term) s **geschlossen**, wenn $FV(s) = \emptyset$

▶ **Abschluss** einer Formel: $Cl(\phi) = \forall z_1 \dots z_k.\phi$ für $FV(\phi) = \{z_1, \dots, z_k\}$

Semantik: Strukturen

Definition (Struktur \mathfrak{A} zur Signatur Σ)

$\mathfrak{A} = (A, f, P)$ mit

- (i) A nicht-leere Menge (Universum)
- (ii) für $f \in \Sigma$ mit $ar(f) = n$, n -stellige Funktion $f_{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$
- (iii) für $P \in \Sigma$ mit $ar(P) = n$, n -stellige Relation $P_{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$

- ▶ Für $a \in A$, Konstante $\bar{a} \in \mathcal{T}_{\Sigma}$
- ▶ Damit Auswertung von geschlossenen Termen: $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathfrak{A}} : \mathcal{T}_{\Sigma} \rightarrow A$

$$\begin{aligned}\llbracket \bar{a} \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= a \\ \llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= f_{\mathfrak{A}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathfrak{A}})\end{aligned}$$

Semantische Gültigkeit

- Auswertung von **Formeln**: $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathfrak{A}} : \text{Form}_{\Sigma} \rightarrow \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}\llbracket \perp \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= 0 & \llbracket \neg \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= 1 - \llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} \\ \llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= \min(\llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}}, \llbracket \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}}) & \llbracket \phi \vee \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= \max(\llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}}, \llbracket \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}}) \\ \llbracket \phi \longrightarrow \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= \max(1 - \llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}}, \llbracket \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}}) \\ \llbracket \phi \longleftrightarrow \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}} &= 1 - |\llbracket \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} - \llbracket \psi \rrbracket_{\mathfrak{A}}|\end{aligned}$$

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\mathfrak{A}} = \begin{cases} 1 & \langle \llbracket t_1 \rrbracket_{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathfrak{A}} \rangle \in P_{\mathfrak{A}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket t_1 \doteq t_2 \rrbracket_{\mathfrak{A}} = \begin{cases} 1 & \llbracket t_1 \rrbracket_{\mathfrak{A}} = \llbracket t_2 \rrbracket_{\mathfrak{A}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket \forall x. \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} = \min(\{\llbracket \phi \llbracket \bar{a} \rrbracket_{\mathfrak{A}} \rrbracket_{\mathfrak{A}} \mid a \in A\})$$

$$\llbracket \exists x. \phi \rrbracket_{\mathfrak{A}} = \max(\{\llbracket \phi \llbracket \bar{a} \rrbracket_{\mathfrak{A}} \rrbracket_{\mathfrak{A}} \mid a \in A\})$$

- Damit **semantische Gültigkeit** (**Wahrheit**):

$$\mathfrak{A} \models \phi \text{ gdw. } \llbracket Cl(\phi) \rrbracket_{\mathfrak{A}} = 1, \models \phi \text{ gdw. } \mathfrak{A} \models \phi \text{ für alle } \mathfrak{A}$$

Substitution

- ▶ $t \left[\frac{s}{x} \right]$ ist **Ersetzung** von x durch s in t
- ▶ Definiert durch strukturelle **Induktion**:

$$y \left[\frac{s}{x} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s & x = y \\ y & x \neq y \end{cases}$$

$$f(t_1, \dots, t_n) \left[\frac{s}{x} \right] \stackrel{\text{def}}{=} f(t_1 \left[\frac{s}{x} \right], \dots, t_n \left[\frac{s}{x} \right])$$

$$\perp \left[\frac{s}{x} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \perp$$

$$(\phi \wedge \psi) \left[\frac{s}{x} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \phi \left[\frac{s}{x} \right] \wedge \psi \left[\frac{s}{x} \right]$$

$$(\phi \longrightarrow \psi) \left[\frac{s}{x} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \phi \left[\frac{s}{x} \right] \longrightarrow \psi \left[\frac{s}{x} \right]$$

$$P(t_1, \dots, t_n) \left[\frac{s}{x} \right] \stackrel{\text{def}}{=} P(t_1 \left[\frac{s}{x} \right], \dots, t_n \left[\frac{s}{x} \right])$$

Substitution

- ▶ $t \left[\frac{s}{x} \right]$ ist **Ersetzung** von x durch s in t
- ▶ Definiert durch strukturelle **Induktion**:

$$\begin{aligned} y \left[\frac{s}{x} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s & x = y \\ y & x \neq y \end{cases} \\ f(t_1, \dots, t_n) \left[\frac{s}{x} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} f(t_1 \left[\frac{s}{x} \right], \dots, t_n \left[\frac{s}{x} \right]) \\ \perp \left[\frac{s}{x} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} \perp \\ (\phi \wedge \psi) \left[\frac{s}{x} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} \phi \left[\frac{s}{x} \right] \wedge \psi \left[\frac{s}{x} \right] \\ (\phi \longrightarrow \psi) \left[\frac{s}{x} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} \phi \left[\frac{s}{x} \right] \longrightarrow \psi \left[\frac{s}{x} \right] \\ P(t_1, \dots, t_n) \left[\frac{s}{x} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} P(t_1 \left[\frac{s}{x} \right], \dots, t_n \left[\frac{s}{x} \right]) \\ (\forall y. \phi) \left[\frac{s}{x} \right] &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \forall y. \phi & x = y \\ \forall y. (\phi \left[\frac{s}{x} \right]) & x \neq y, y \notin FV(s) \\ \forall z. ((\phi \left[\frac{z}{y} \right]) \left[\frac{s}{x} \right]) & x \neq y, y \in FV(s) \\ & \text{mit } z \notin FV(s) \cup FV(\phi) \\ & (z \text{ frisch}) \end{cases} \end{aligned}$$

Zusammenfassung

- ▶ **Prädikatenlogik**: Erweiterung der Aussagenlogik um
 - ▶ Konstanten- und Prädikatensymbole
 - ▶ Gleichheit
 - ▶ Quantoren
- ▶ Semantik der Prädikatenlogik: **Strukturen**
 - ▶ Bilden **Operationen** und **Prädikate** der Logik ab
- ▶ Das **natürliche Schließen** mit Quantoren
 - ▶ **Variablenbindungen** — Umbenennungen bei Substitution
 - ▶ **Eigenvariablenbedingung**
- ▶ Das nächste Mal: **Vollständigkeit** und **natürliche Zahlen**