

Formale Modellierung

Vorlesung 2 vom 28.04.14: Aussagenlogik und natürliches Schließen

Serge Autexier & Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2014

Organisatorisches

- ▶ Montagstermin?
- ▶ Keine Übung am Donnerstag (01. Mai)
- ▶ Dafür Übung nächsten Montag (05. Mai)
- ▶ Nächste VL am Donnerstag (08. Mai)

Heute

- ▶ Einführung in die **formale Logik**
- ▶ **Aussagenlogik**
 - ▶ Beispiel für eine **einfache Logik**
 - ▶ Guter **Ausgangspunkt**
- ▶ **Natürliches Schließen**
 - ▶ Wird auch von **Isabelle** verwendet.
- ▶ Buchempfehlung:
Dirk van Dalen: **Logic and Structure**. Springer Verlag, 2004.

Fahrplan

- ▶ Teil I: Formale Logik
 - ▶ Einführung
 - ▶ Aussagenlogik: Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
 - ▶ Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
 - ▶ Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
 - ▶ Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
 - ▶ Beschreibungslogiken
 - ▶ FOL mit induktiven Datentypen
 - ▶ FOL mit Induktion und Rekursion
 - ▶ Die Unvollständigkeitssätze von Gödel
- ▶ Teil II: Spezifikation und Verifikation

Formalisierung von Aussagen

▶ Beispielaussagen:

1. John fuhr weiter und stieß mit einem Fußgänger zusammen.
2. John stieß mit einem Fußgänger zusammen und fuhr weiter.
3. Wenn ich das Fenster öffne, haben wir Frischluft.
4. Wenn wir Frischluft haben, dann ist $1 + 3 = 4$
5. Wenn $1 + 2 = 4$, dann haben wir Frischluft.
6. John arbeitet oder ist zu Hause.
7. Euklid war ein Grieche oder ein Mathematiker.

▶ Probleme natürlicher Sprache:

- ▶ Mehrdeutigkeit
- ▶ Synonyme
- ▶ Versteckte (implizite) Annahmen

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass.

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass.
 - ▶ Es regnet.

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass.
 - ▶ Es regnet.
 - ▶ Also ist die Straße nass.

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass. ▶ Nachts ist es dunkel.
 - ▶ Es regnet.
 - ▶ Also ist die Straße nass.

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass.
 - ▶ Es regnet.
 - ▶ Also ist die Straße nass.
 - ▶ Nachts ist es dunkel.
 - ▶ Es ist hell.

Formale Logik

- ▶ Ziel: **Formalisierung** von **Folgerungen** wie
 - ▶ Wenn es regnet, wird die Straße nass.
 - ▶ Es regnet.
 - ▶ Also ist die Straße nass.
 - ▶ Nachts ist es dunkel.
 - ▶ Es ist hell.
 - ▶ Also ist es nicht nachts.
- ▶ Eine **Logik** besteht aus
 - ▶ Einer **Sprache** \mathcal{L} von **Formeln** (**Aussagen**)
 - ▶ Einer **Semantik**, die Formeln eine **Bedeutung** zuordnet
 - ▶ **Schlußregeln** (**Folgerungsregeln**) auf den Formeln.
- ▶ Damit: **Gültige** (“wahre”) Aussagen berechnen.

Beispiel für eine Logik

► Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

Beispiel für eine Logik

► Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

► Schlußregeln:

$$\frac{\diamondsuit}{\clubsuit} \alpha$$

$$\frac{\diamondsuit}{\spadesuit} \beta$$

$$\frac{\clubsuit \quad \spadesuit}{\heartsuit} \gamma$$

$$\frac{}{\diamondsuit} \delta$$

► Beispielableitung: \heartsuit

Aussagenlogik

- ▶ Sprache \mathcal{Prop} gegeben durch:
 1. Variablen (Atome) $V \subseteq \mathcal{Prop}$ (Menge V gegeben)
 2. $\perp \in \mathcal{Prop}$
 3. Wenn $\phi, \psi \in \mathcal{Prop}$, dann
 - ▶ $\phi \wedge \psi \in \mathcal{Prop}$
 - ▶ $\phi \vee \psi \in \mathcal{Prop}$
 - ▶ $\phi \longrightarrow \psi \in \mathcal{Prop}$
 - ▶ $\phi \longleftrightarrow \psi \in \mathcal{Prop}$
 4. Wenn $\phi \in \mathcal{Prop}$, dann $\neg\phi \in \mathcal{Prop}$.

- ▶ NB. Präzedenzen: \neg vor \wedge vor \vee vor $\longrightarrow, \longleftrightarrow$

Wann ist eine Formel gültig?

- ▶ **Semantische** Gültigkeit $\models P$
 - ▶ **Übersetzung** in semantische Domäne
 - ▶ Variablen sind **wahr** oder **falsch**
 - ▶ Operationen **verknüpfen** diese Werte
- ▶ **Syntaktische** Gültigkeit $\vdash P$
 - ▶ Formale **Ableitung**
 - ▶ **Natürliches Schließen**
 - ▶ **Sequenzkalkül**
 - ▶ **Andere** (Hilbert-Kalkül, gleichungsbasierte Kalküle, etc.)

Semantik

- ▶ Domäne: $\{0, 1\}$ (0 für falsch, 1 für wahr)

Definition (Semantik aussagenlogischer Formeln)

Für **Valuation** $v : V \rightarrow \{0, 1\}$ ist $\llbracket \cdot \rrbracket_v : Prop \rightarrow \{0, 1\}$ definiert als

$$\llbracket w \rrbracket_v = v(w) \quad (\text{mit } w \in V)$$

$$\llbracket \perp \rrbracket_v = 0$$

$$\llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket_v = \min(\llbracket \phi \rrbracket_v, \llbracket \psi \rrbracket_v)$$

$$\llbracket \phi \vee \psi \rrbracket_v = \max(\llbracket \phi \rrbracket_v, \llbracket \psi \rrbracket_v)$$

$$\llbracket \phi \longrightarrow \psi \rrbracket_v = 0 \iff \llbracket \phi \rrbracket_v = 1 \text{ und } \llbracket \psi \rrbracket_v = 0$$

$$\llbracket \phi \longleftrightarrow \psi \rrbracket_v = 1 \iff \llbracket \phi \rrbracket_v = \llbracket \psi \rrbracket_v$$

$$\llbracket \neg \phi \rrbracket_v = 1 - \llbracket \phi \rrbracket_v$$

Semantische Gültigkeit und Folgerung

- ▶ Semantische Gültigkeit: $\models \phi$

$$\models \phi \text{ gdw. } \llbracket \phi \rrbracket_v = 1 \text{ für alle } v$$

- ▶ Semantische Folgerung: sei $\Gamma \subseteq Prop$, dann

$$\Gamma \models \psi \text{ gdw. } \llbracket \psi \rrbracket_v = 1 \text{ wenn } \llbracket \phi \rrbracket_v = 1 \text{ für alle } \phi \in \Gamma$$

Beweisen mit semantischer Folgerung

- ▶ Die **Wahrheitstabellenmethode**:
 - ▶ Berechne $\llbracket \phi \rrbracket_v$ für alle Möglichkeiten für v
- ▶ Beispiel: $\models (\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\phi)$

| | | | | | | |
|--------|--------|-----------------------------|------------|------------|-------------------------------------|---|
| ϕ | ψ | $\phi \longrightarrow \psi$ | $\neg\psi$ | $\neg\phi$ | $\neg\psi \longrightarrow \neg\phi$ | $(\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\phi)$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Beweisen mit semantischer Folgerung

- ▶ Die **Wahrheitstabellenmethode**:
 - ▶ Berechne $\llbracket \phi \rrbracket_v$ für alle Möglichkeiten für v
- ▶ Beispiel: $\models (\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\phi)$

| ϕ | ψ | $\phi \longrightarrow \psi$ | $\neg\psi$ | $\neg\phi$ | $\neg\psi \longrightarrow \neg\phi$ | $(\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\phi)$ |
|--------|--------|-----------------------------|------------|------------|-------------------------------------|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Beweisen mit semantischer Folgerung

- ▶ Die **Wahrheitstabellenmethode**:
 - ▶ Berechne $\llbracket \phi \rrbracket_v$ für alle Möglichkeiten für v
- ▶ Beispiel: $\models (\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\phi)$

| ϕ | ψ | $\phi \longrightarrow \psi$ | $\neg\psi$ | $\neg\phi$ | $\neg\psi \longrightarrow \neg\phi$ | $(\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\phi)$ |
|--------|--------|-----------------------------|------------|------------|-------------------------------------|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Beweisen mit semantischer Folgerung

- ▶ Die **Wahrheitstabellenmethode**:
 - ▶ Berechne $\llbracket \phi \rrbracket_v$ für alle Möglichkeiten für v
- ▶ Beispiel: $\models (\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\phi)$

| ϕ | ψ | $\phi \longrightarrow \psi$ | $\neg\psi$ | $\neg\phi$ | $\neg\psi \longrightarrow \neg\phi$ | $(\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\phi)$ |
|--------|--------|-----------------------------|------------|------------|-------------------------------------|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Beweisen mit semantischer Folgerung

- ▶ Die **Wahrheitstabilenmethode**:
 - ▶ Berechne $\llbracket \phi \rrbracket_v$ für alle Möglichkeiten für v

- ▶ Beispiel: $\models (\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\phi)$

| ϕ | ψ | $\phi \longrightarrow \psi$ | $\neg\psi$ | $\neg\phi$ | $\neg\psi \longrightarrow \neg\phi$ | $(\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \longrightarrow \neg\phi)$ |
|--------|--------|-----------------------------|------------|------------|-------------------------------------|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

- ▶ **Problem**: Aufwand **exponentiell** 2^a zur Anzahl a der Atome
- ▶ **Vorteil**: Konstruktion von **Gegenbeispielen**

Natürliches Schließen (ND)

- ▶ **Vorgehensweise:**

1. Erst Kalkül nur für $\wedge, \longrightarrow, \perp$

2. Dann **Erweiterung** auf **alle** Konnektive.

- ▶ Für jedes **Konnektiv**: **Einführungs-** und **Eliminationsregel**

- ▶ NB: **konstruktiver Inhalt** der meisten Regeln

Beispiel für Natürliches Schließen

► Sprache $\mathcal{L} = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

► Schlußregeln:

$$\frac{\diamondsuit}{\clubsuit} \alpha$$

$$\frac{\diamondsuit}{\spadesuit} \beta$$

$$\frac{\clubsuit \spadesuit}{\heartsuit} \gamma$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\diamondsuit] \\ \vdots \\ \heartsuit \end{array}}{\heartsuit} \delta'$$

► Beispielableitung: \heartsuit

Natürliches Schließen — Die Regeln

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E_L$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E_R$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow I$$

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow E$$

$$\frac{}{\phi} \perp$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\phi \rightarrow \perp] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\phi} \text{raa}$$

Die fehlenden Konnektive

- ▶ Einführung als **Abkürzung**:

$$\neg\phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi \longrightarrow \perp$$

$$\phi \vee \psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

$$\phi \longleftrightarrow \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \phi)$$

- ▶ Ableitungsregeln als **Theoreme**.

Die fehlenden Schlußregeln

$$\frac{[\phi] \quad \vdots \quad \perp}{\neg\phi} \neg I$$

$$\frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp} \neg E$$

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee I_L \quad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee I_R$$

$$\frac{[\phi] \quad [\psi] \quad \vdots \quad \vdots \quad \phi \vee \psi \quad \sigma \quad \sigma}{\sigma} \vee E$$

$$\frac{\phi \longrightarrow \psi \quad \psi \longrightarrow \phi}{\phi \longleftrightarrow \psi} \longleftrightarrow I$$

$$\frac{\phi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\psi} \longleftrightarrow E_L$$

$$\frac{\psi \quad \phi \longleftrightarrow \psi}{\phi} \longleftrightarrow E_R$$

Zusammenfassung

- ▶ Formale Logik **formalisiert** das (natürlichsprachliche) Schlußfolgern
- ▶ **Logik**: Formeln, Semantik, Schlußregeln (Kalkül)
- ▶ **Aussagenlogik**: Aussagen mit \wedge , \longrightarrow , \perp
 - ▶ \neg , \vee , \longleftrightarrow als **abgeleitete Operatoren**
- ▶ **Semantik** von Aussagenlogik $\llbracket \cdot \rrbracket_v : Prop \rightarrow \{0, 1\}$
- ▶ Natürliches **Schließen**: intuitiver Kalkül
- ▶ Nächste Woche:
 - ▶ Konsistenz und Vollständigkeit von Aussagenlogik