

Formale Modellierung

Vorlesung 9 vom 12.06.14: Die Unvollständigkeitssätze von Gödel

Serge Autexier & Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2014

1 [16]

Fahrplan

- Teil I: Formale Logik
 - Einführung
 - Aussagenlogik: Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
 - Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik
 - Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
 - Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
 - Beschreibungslogiken
 - FOL mit induktiven Datentypen
 - FOL mit Induktion und Rekursion
 - Die Unvollständigkeitssätze von Gödel
- Teil II: Spezifikation und Verifikation

2 [16]

Das Tagesmenü

- Gödels erster Unvollständigkeitssatz

Jede konsistente Theorie, die hinreichend expressiv ist, um die natürlichen Zahlen zu Formalisieren erlaubt die Formulierung von wahren Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind.

3 [16]

Gödels erster Unvollständigkeitssatz

Jede konsistente Theorie, die hinreichend expressiv ist, um die natürlichen Zahlen zu Formalisieren erlaubt die Formulierung von wahren Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind.

- Zu jeder Formel φ gibt es eine natürliche Zahl, die diese Formel eindeutig kodiert $\lceil \varphi \rceil$
- Zu jedem ND-Beweis D für φ gibt es eine natürliche Zahl, die diesen Beweis eindeutig kodiert $\lceil D \rceil$
- Beweisbarkeit von φ in $\mathbb{N}$ ist als Prädikat $\text{Provable}(\lceil \varphi \rceil)$ formalisierbar in $\mathbb{N}$
- Konstruktion einer Formel mit Aussage "Ich bin nicht beweisbar"

$$\varphi \longleftrightarrow \neg \text{Prov}(\lceil \varphi \rceil)$$

4 [16]

Gödel Kodierung

Folgende Funktion ist definierbar in PA:

$$(n, m) = 2^n \times 3^m$$

Eigenschaften: Es gibt eindeutige Projektionen

$$\text{Left}((n, m)) = n \quad \text{Right}((n, m)) = m$$

5 [16]

Gödel Kodierung für Terme

Signatur $\Sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$, Variables X

- Variablen $x_1, x_2, \dots \in X$

$$\lceil x_i \rceil := (0, i)$$

- Funktionen $f_1, \dots \in \mathcal{F}$

$$\lceil f_i \rceil := (1, i)$$

- Terme

$$\lceil f_i(t_1, \dots, t_n) \rceil := \langle \lceil f_i \rceil, \lceil t_1 \rceil, \dots, \lceil t_n \rceil \rangle$$

wobei

$$\langle n_1, \dots, n_k \rangle := \begin{cases} n_1 & \text{if } k = 1 \\ \langle n_1, \langle n_2, \dots, n_k \rangle \rangle & \text{if } k > 1 \end{cases}$$

6 [16]

Gödel Kodierung für Formeln

Signatur $\Sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$, Variables X

- Prädikate $p_1, \dots \in \mathcal{P}$, $\perp := p_1$, $\dot{=} := p_2$

$$\lceil p_i \rceil := (2, i)$$

- Atome

$$\lceil p_i(t_1, \dots, t_n) \rceil := \langle \lceil p_i \rceil, \lceil t_1 \rceil, \dots, \lceil t_n \rceil \rangle$$

- Konnektive und Quantoren

$$\begin{aligned} \lceil \neg \rceil &= (3, 1), \lceil \wedge \rceil = (3, 2), \lceil \vee \rceil = (3, 3) \\ \lceil \longrightarrow \rceil &= (3, 4), \lceil \longleftrightarrow \rceil = (3, 5), \lceil \forall \rceil = (3, 6), \lceil \exists \rceil = (3, 7) \end{aligned}$$

7 [16]

Gödel Kodierung für Formeln II

Signatur $\Sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$, Variables X

- $\lceil \neg \varphi \rceil = (\lceil \neg \rceil, \lceil \varphi \rceil)$
- $\lceil \psi \circ \varphi \rceil = \langle \lceil \circ \rceil, \lceil \psi \rceil, \lceil \varphi \rceil \rangle$
- $\lceil Qx_i. \varphi \rceil = \langle \lceil Q \rceil, \lceil x_i \rceil, \lceil \varphi \rceil \rangle$

Lemma 1 (Facts)

- Sei $G := \{ \lceil \varphi \rceil \mid \varphi \text{ Variable, Term, oder Formel} \}$
- G ist entscheidbar
- $\lceil n \rceil = \varphi \iff \lceil \varphi \rceil = n$ ist eindeutig definiert auf G
- Substitutionsfunktion $\text{subst}(n, x, t) = m$ definierbar auf G

$$\lceil \varphi[t/x] \rceil = \text{subst}(\lceil \varphi \rceil, \lceil x \rceil, \lceil t \rceil)$$

8 [16]

Gödel Kodierung für Ableitungen

- Gödel Kodierung für Hypothesen Liste:

$$[[\varphi_1, \dots, \varphi_n]] = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ \langle (4, [\varphi_1]), \dots, (4, [\varphi_n]) \rangle & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

$$n \in h \Leftrightarrow \begin{cases} \perp & \text{if } h = 1 \\ \top & \text{if } h = (4, n) \vee \exists m. h = ((4, n), m) \\ n \in m & \text{if } \exists q. m. \neg (q = n) \wedge h = ((4, q), m) \end{cases}$$

- Definition von **Konkatenation** * und **Streichen** von Hypothesen

9 [16]

Gödel Kodierung für Ableitungen

$$\left[\frac{D_1 \quad D_2}{\phi \wedge \psi} \wedge I \right] = \langle (5, [\wedge]), \left[\frac{D_1}{\phi} \right], \left[\frac{D_2}{\psi} \right], [\phi \wedge \psi] \rangle$$

$$\left[\frac{\frac{D}{\phi \wedge \psi} \wedge E_L}{\phi} \right] = \langle (6, [\wedge]), \left[\frac{D}{\phi \wedge \psi} \right], [\phi] \rangle$$

10 [16]

Gödel Kodierung für Ableitungen

$$\left[\frac{D}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow I \right] = \langle (5, [\rightarrow]), \left[\frac{D}{\psi} \right], [\phi \rightarrow \psi] \rangle$$

$$\left[\frac{\frac{D_1 \quad D_2}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow E}{\psi} \right] = \langle (6, [\rightarrow]), \left[\frac{D_1}{\phi} \right], \left[\frac{D_2}{\phi \rightarrow \psi} \right], [\psi] \rangle$$

11 [16]

Gödel Kodierung für Ableitungen

- Basisfall: $[[\phi]] := \langle (4, [\phi]) \rangle$
- Entsprechend für RAA, $\forall I, \forall E$
- Definiere $\text{Der}(p, h, z)$: $[p]$ ist Beweis für $[z]$ aus Hypothesen $[h]$

$\text{Der}(p, h, z) := (4, z) \in h$	Hypothese
$\vee \exists p_1, h_1, z_1, p_2, h_2, z_2.$	$\wedge I$
$\text{Der}(p_1, h_1, z_1) \wedge \text{Der}(p_2, h_2, z_2) \wedge$	
$h = h_1 * h_2 \wedge$	
$p = \langle (5, [\wedge]), p_1, p_2, [\![z_1] \wedge [z_2]\!] \rangle$	
$\vee \exists p_1, h_1, z_1, u.$	$\rightarrow I$
$\text{Der}(p_1, h_1, z_1) \wedge$	
$h = \text{Streiche}(u, h_1) \wedge$	
$p = \langle (5, [\rightarrow]), p_1, [\![u] \rightarrow [z_1]\!] \rangle$	
...	

12 [16]

Beweisbarkeit

- Peano-Axiome + Erweiterung: PA Sei $Ax : \mathbb{N}$ Prädikat

$$Ax(n) \leftrightarrow \bigvee_{\varphi \in PA} n = [\varphi]$$

- $\text{Prov}(p, f)$: p is Gödelnummer eines ND-Beweis für $[f]$

$$\text{Prov}(p, f) \Leftrightarrow \exists h. (\text{Der}(p, h, z) \wedge \forall g. g \in h \wedge Ax(g))$$

- $\text{Thm}(f)$: $[f]$ ist ein PA Theorem

$$\text{Thm}(f) \leftrightarrow \exists p. \text{Prov}(p, f)$$

13 [16]

Fixpoint Theorem

Theorem 2 (Fixpoint Theorem)

For each formula $\varphi(x)$ with only one free variable x there exists a formula ψ such that $\vdash \varphi([\psi]) \leftrightarrow \psi$

14 [16]

Gödels erster Unvollständigkeitssatz

Jede konsistente Theorie, die hinreichend expressiv ist, um die natürlichen Zahlen zu Formalisieren erlaubt die Formulierung von wahren Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind.

$$\text{Thm}(f) \leftrightarrow \exists p. \text{Prov}(p, f)$$

existiert φ so dass $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{Thm}([\varphi])$ (Fixpoint auf $\neg \text{Thm}(f)$)

φ bedeutet: "Ich bin nicht beweisbar"

- Es gilt $\mathbb{N} \models \varphi \leftrightarrow \neg \text{Thm}([\varphi])$

- Annahme $\mathbb{N} \models \text{Thm}([\varphi])$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \exists x. \text{Prov}(x, [\varphi]) & \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \text{Prov}(n, [\varphi]) \text{ for some } n \\ \Leftrightarrow \vdash \text{Prov}(n, [\varphi]) \text{ for some } n & \Leftrightarrow \vdash \varphi \\ \Rightarrow \vdash \neg \text{Thm}([\varphi]) & \Rightarrow \mathbb{N} \models \neg \text{Thm}([\varphi]) \end{aligned}$$

- Contradiction, hence φ is true in $\mathbb{N}$, but not provable

15 [16]

Zusammenfassung

- Terminierende Funktionen und abgeleitete Induktionsschemata
 - Hilfreich bei Induktion über Variablen in Argumenten von terminierenden Funktionen um Rekursionsgleichungen anwendbar zu machen
- Gödels erster Unvollständigkeitssatz
 - Jede konsistente Theorie, die hinreichend expressiv ist, um die natürlichen Zahlen zu Formalisieren erlaubt die Formulierung von wahren Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind.
- Beweis durch Kodierung von Formeln und Ableitbarkeit in Peano-Arithmetik
- Reflektion der Beweisbarkeit in einer Formel
- Konstruktion einer Formel mit der Aussage "Ich bin nicht beweisbar"

16 [16]