

Formale Modellierung

Vorlesung 3 vom 05.05.14: Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik

Serge Autexier & Christoph Lüth

Universität Bremen

Sommersemester 2014

1 [13]

Organisatorisches

- Übung am **Donnerstag 08.05.14** muss ausfallen.
- Ersatztermin?

2 [13]

Fahrplan

- **Teil I: Formale Logik**
 - Einführung
 - Aussagenlogik: Syntax und Semantik, Natürliches Schließen
 - **Konsistenz & Vollständigkeit der Aussagenlogik**
 - Prädikatenlogik (FOL): Syntax und Semantik
 - Konsistenz & Vollständigkeit von FOL
 - Beschreibungslogiken
 - FOL mit induktiven Datentypen
 - FOL mit Induktion und Rekursion
 - Die Unvollständigkeitssätze von Gödel
- **Teil II: Spezifikation und Verifikation**

3 [13]

Das Tagesmenü

- Einige Eigenschaften der Aussagenlogik (PL)
- $\Gamma \vdash \phi$ vs. $\Gamma \models \phi$:
 - Korrektheit
 - Konsistenz
 - Vollständigkeit

4 [13]

Eigenschaften der Aussagenlogik

- $\mathcal{Prop}$ bildet eine **Boolesche Algebra**:

$$\begin{aligned}
 &\models (\phi \vee \psi) \vee \sigma \longleftrightarrow \phi \vee (\psi \vee \sigma) \\
 &\models (\phi \wedge \psi) \wedge \sigma \longleftrightarrow \phi \wedge (\psi \wedge \sigma) \\
 &\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow \psi \vee \phi \\
 &\models \phi \wedge \psi \longleftrightarrow \psi \wedge \phi \\
 &\models \phi \vee (\psi \wedge \sigma) \longleftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma) \\
 &\models \phi \wedge (\psi \vee \sigma) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma) \\
 &\models \neg(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi \\
 &\models \neg(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi \\
 &\models \phi \vee \phi \longleftrightarrow \phi \\
 &\models \phi \wedge \phi \longleftrightarrow \phi \\
 &\models \neg\neg\phi \longleftrightarrow \phi
 \end{aligned}$$

5 [13]

Eigenschaften der Aussagenlogik

- Rechnen in $\mathcal{Prop}$:
 - **Substitutivität**:
wenn $\models \phi_1 \longleftrightarrow \phi_2$, dann $\models \psi[\phi_1] \longleftrightarrow \psi[\phi_2]$ für Atom p .
 - Sei $\phi \approx \psi$ gdw. $\models \phi \longleftrightarrow \psi$, dann ist $\approx$ eine **Äquivalenzrelation**
- Damit: algebraisches **Umformen** als **Beweisprinzip**
 - Beispiele: $\models (\phi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \sigma)) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi \longrightarrow \sigma)$
 $\models \phi \longrightarrow \psi \longrightarrow \phi$

6 [13]

Eigenschaften der Aussagenlogik

- Operatoren durch andere definierbar:

$$\begin{aligned}
 &\models (\phi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \phi) \\
 &\models (\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\phi \vee \psi) \\
 &\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow (\neg\phi \longrightarrow \psi) \\
 &\models \phi \vee \psi \longleftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \\
 &\models \phi \wedge \psi \longleftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \\
 &\models \neg\phi \longleftrightarrow (\phi \longrightarrow \perp) \\
 &\models \perp \longleftrightarrow (\phi \wedge \neg\phi) \\
 &\models \top \longleftrightarrow (\phi \vee \neg\phi)
 \end{aligned}$$

- $(\wedge, \neg)$ und $(\vee, \perp)$ sind **ausreichend** (functional complete)
- Anwendung: konjunktive und disjunktive **Normalformen** (CNF/DNF)
- Ein **Operator** reicht: $A \mid B$ (Sheffer-Strich), $A \downarrow B$ (weder-noch)

7 [13]

Korrektheit (Soundness)

- $\Gamma \vdash \phi$: **Ableitbarkeit**
- $\Gamma \models \phi$: semantische '**Wahrheit**'
- Ist alles **wahr**, was wir **ableiten** können? (**Korrektheit**)
- Ist alles **ableitbar**, was **wahr** ist? (**Vollständigkeit**)

Lemma 1 (Korrektheit von ND)

Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann $\Gamma \models \phi$

Beweis: **Induktion** über der Ableitung $\Gamma \vdash \phi$

- Nützliches Korollar: $\Gamma \not\models \phi$ dann $\Gamma \not\vdash \phi$

8 [13]

Konsistenz

- Nur konsistente Logiken (Mengen von Aussagen) sind **sinnvoll**.

Definition 2 (Konsistenz)

Menge Γ von Aussagen **konsistent** gdw. $\Gamma \not\vdash \perp$

Lemma 3 (Charakterisierung von Konsistenz)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Γ *konsistent*
- (ii) Es gibt kein ϕ so dass $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$
- (iii) Es gibt ein ϕ so dass $\Gamma \not\vdash \phi$
- (iv) Γ *inkonsistent* ($\Gamma \vdash \perp$)
- (v) Es gibt ein ϕ so dass $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$
- (vi) Für alle ϕ , $\Gamma \vdash \phi$

9 [13]

Maximale Konsistenz

- Wenn es v gibt so dass $\llbracket \psi \rrbracket_v = 1$ für $\psi \in \Gamma$, dann Γ konsistent.

Definition 4 (Maximale Konsistenz)

Γ **maximal konsistent** gdw.

- (i) Γ konsistent, und
- (ii) wenn $\Gamma \subseteq \Gamma'$ und Γ' konsistent, dann $\Gamma = \Gamma'$

Lemma 5 (Konstruktion maximal konsistenter Mengen)

Für jedes konsistente Γ gibt es **maximal** konsistentes Γ^* mit $\Gamma \subseteq \Gamma^*$

10 [13]

Eigenschaften maximal konsistenter Mengen

- Wenn $\Gamma \cup \{\phi\}$ inkonsistent, dann $\Gamma \vdash \neg\phi$ (Beweis: $\neg I$)
- Wenn $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ inkonsistent, dann $\Gamma \vdash \phi$ (Beweis: raa)

Lemma 6

Wenn Γ **maximal konsistent**, dann **geschlossen** unter Ableitbarkeit:
 $\Gamma \vdash \phi$ dann $\phi \in \Gamma$.

- Wenn Γ maximal konsistent ist, dann:
 - (i) entweder $\phi \in \Gamma$ oder $\neg\phi \in \Gamma$
 - (ii) $\phi \wedge \psi \in \Gamma$ gdw. $\phi, \psi \in \Gamma$
 - (iii) $\phi \rightarrow \psi \in \Gamma$ gdw. (wenn $\phi \in \Gamma$ dann $\psi \in \Gamma$)

11 [13]

Vollständigkeit

Lemma 7

Wenn Γ *konsistent*, dann gibt es v so dass $\llbracket \phi \rrbracket_v = 1$ für $\phi \in \Gamma$.

Damit:

- Wenn $\Gamma \not\vdash \phi$ dann gibt es v so dass $\llbracket \psi \rrbracket_v = 1$ für $\psi \in \Gamma$, $\llbracket \phi \rrbracket_v = 0$.
- Wenn $\Gamma \not\vdash \phi$ dann $\Gamma \not\models \phi$.

Theorem 8 (Vollständigkeit der Aussagenlogik)

$\Gamma \vdash \phi$ gdw. $\Gamma \models \phi$

- Deshalb: Aussagenlogik **entscheidbar**

12 [13]

Zusammenfassung

- Aussagenlogik ist eine **Boolesche Algebra**.
 - Äquivalenzumformung als **Beweisprinzip**
- Aussagenlogik und natürliches Schließen sind **korrekt** und **vollständig**.
 - Beweis der Vollständigkeit: maximale Konsistenz
 - Konstruktion des **Herbrand-Modells**, Aufzählung aller (wahren, ableitbaren) Aussagen
- Aussagenlogik ist **entscheidbar**: für Γ und ϕ , $\Gamma \vdash \phi$ oder $\Gamma \not\vdash \phi$.
- Nächste VL: Prädikatenlogik

13 [13]