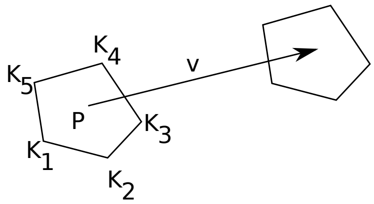
Serge Autexier
Christoph Lüth

5. Übungsblatt

Ausgabe: 26.06.14
Abgabe: 10.07.14



In dieser Übung wollen wir die Bewegung und insbesondere den Bremsvorgang eines omnidirektionalen Roboters modellieren.

Abstrakt besteht der Roboter aus einem konvexen Polygon, welches seine Form nicht ändert, allerdings seine Orientierung und Position (Pose) im zweidimensionalen Raum. Das Polygon (mit N Eckpunkten) wird repräsentiert als eine Sequenz $\mathbf{K} = \{\vec{K}_i\}_{i=1,\ldots,N}$. Zu einer gegeben Zeit t wird die Position des Roboters durch den Ortsvektor $\vec{P}(t)$, sowie eine Orientierung $\omega(t)$ definiert. Die zu diesem Zeitpunkt von dem Roboter eingenomme Fläche ist dann eine Menge von Punkten, die sich aus konvexen Hülle der um $\vec{P}(t)$ verschobenen und um $\omega(t)$ gedrehten Kontur ergibt:

$$A_{rob}(t) = conv(\mathbf{K}(t)) = conv(\{rot(\omega(t), \vec{K}_i) + \vec{P}(t)\}_{i=1,\ldots,N})$$

Der Roboter bewegt sich mit einer gegeben linearren Geschindigkeit v in Richtung seiner momentanen Orientierung ω; daraus ergibt sich eine vektorielle Geschwindigkeit $\vec{v}$. Zur Änderung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ können wir die lineare Geschwindigkeit mit einer Beschleunigung a mit $a_{min} \leq a \leq a_{max}$; a_{min} ist die minimale Beschleunigung, oder *Bremsbeschleunigung*.

Bremsverhalten

Wir betrachten jetzt das Verhalten des Roboters während einer Bremsung. Wir nehmen an, dass während des Bremens die Orientierung ω konstant bleibt. Die lineare Geschwindigkeit verringert sich um die Bremsbreschleunigung a_{min} bis zum Stillstand.

Wenn wir zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Geschwindigkeit v_0 (und der Orientierung ω_0) anfangen zu bremsen, ergeben sich Geschwindigkeit und zurückgelegte Strecke als

$$v(t) = v_0 - a_{min}t \quad s(t) = v_0 t - \frac{a_{min}}{2}t^2$$

Die Zeit T bis zum Stillstand (Bremszeit) ergibt sich aus der Lösung der Gleichung () für $v(T) = 0$, und die dabei überstrichene Strecke (Bremsweg) S als $S = S(T)$:

$$T = \frac{v_0}{a_{min}}, S = \frac{{v_0}^2}{2a_{min}}$$

Bremsfläche

Während des gesamten Bremsvorgangs bewegt sich der Roboter mit der vektoriellen Geschwindigkeit $\vec{v} = (S, \omega_0)$. Dabei ü für $0 \leq \lambda \leq 1$. Sei $\mathbf{Q} = \{\vec{Q}_i\}_{i=1,\ldots,n} = \{rot(\omega_0, \vec{K}_i) + \vec{P}_0\}_{i=1,\ldots,N}$ die Kontur des Roboters zu Beginn des Bremsvorgangs, dann überstreicht der Roboter während des Bremsens bis zum Stillstand die Fläche, die sich aus der Verschiebung von $\mathbf{Q}$ um $\lambda \cdot \vec{v}$ ergeben:

$$A_{brk} = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} conv(\{\vec{Q}_i + \lambda \cdot \vec{v}\}_{i=1,\ldots,N})$$

Nach der Definition der komplexen Hülle ist dies äquivalent zu

$$A_{brk} = conv(\{\vec{Q}_i, \vec{Q}_i + \vec{v}\}_{i=1,\dots,N})$$

Mit anderen Worten, wir verschieben die Kontur vom Startzeitpunkt des Bremsvorgangs zum Endzeitpunkt T, und bilden dann die konvexe Hülle.

$\boxed{5.1}$ *Formalisierung I* — *15 Punkte*

Wir wollen diese Konzepte jetzt in Isabelle formalisieren. Als Grundlage benutzen wir die Formalisierung von Punkten und Polygonen aus dem letzten Übungsblatt. Formalisieren Sie darauf aufbauend folgende Konzepte:

- Ein Prädikät `convex`, welches angibt, ob eine Menge von Punkten konvex ist;
- Die Spezfikation für eine Funktion `convex_hull`, welches die konvexe Hülle einer Menge von Punkten berechnet;
- Die von einem Polygon `p` enthaltene Menge von Punkte `area p`;
- Die Bewegung eines Polygons `p` um einen Bewegungsvektor `v`, `move p v`;
- Die bei dieser Bewegung überstrichene Fläche als Menge von Punkten, `covered p v`.

$\boxed{5.2}$ *Formalisierung II* — *5 Punkte*

Geben Sie die Spezifikation für eine Funktion an, welche für ein gegebene Roboterkontur (als Polygon), einer momentanen Position, Geschwindigkeit und Orientierung des Roboters die beim Bremsen bis zum Stillstand überstrichene Fläche zurückgibt. Unter der Annahme, dass es eine Funktion gibt, welche die Spezifikation von `convex_hull` erfüllt, geben Sie eine Implementierung dieser Funktion an, und zeigen Sie die Korrektheit.