Einführung in die Kategorientheorie

Christian Dzierzon[1]

7. Juni 2005

[1]Universität Bremen, dzierzon@tzi.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Dieses Skript entstand parallel zur Vorlesung Algebra II, WiSe 03/04, Universität Bremen, gehalten von Prof. H.-E. Porst, Christian Dzierzon und Christoph Schubert. Es ist die Ausarbeitung einer zweistündigen (!) Einführungsveranstaltung zur Kategorientheorie. Es soll daher nur zur Vervollständigung und Ergänzung der Vorlesungsmitschrift sowie zur Nachbereitung der Inhalte dienen und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es kann und soll somit auch nicht die zahlreichen Lehrbücher über Kategorientheorie ersetzen. Im dritten Abschnitt der Einleitung finden sich einige wenige Literaturempfehlungen, unter anderem auch *Category Theory* von H. Herrlich und G.E. Strecker, das als inhaltliche Grundlage des kategoriellen Teils der Vorlesung diente. Inhalte des zweiten Teils der Vorlesung Algebra II, der sich hauptsächlich mit Modultheorie befasste, sind in diesem Skript nicht enthalten. Kanonische Inhalte einer Vorlesung über Algebra werden als bekannt vorausgesetzt. Ferner wird die neue deutsche Rechtschreibung verwendet.

An dieser Stelle möchte sich der Autor bei Christoph Schubert bedanken, der ihm bei der Ausarbeitung des Skriptes und insbesondere der Übungsaufgaben behilflich war, sowie bei Frauke Günther, die ihre Mitschrift zur Verfügung stellte.

1.1 Motivation

Wozu überhaupt Kategorientheorie? Diese Frage mag sich mancher Mathematiker stellen, der im Laufe seines Studiums zum ersten mal von Kategorientheorie erfährt oder mit Begriffen dieser Theorie konfrontiert wird. In wenigen Sätzen ließe sich Kategorientheorie etwa so umschreiben:

Die Kategorientheorie ist ein relativ neues Gebiet der Mathematik, zumindest im Gegensatz zu den klassischen Gebieten wie Analysis, Differentialgeometrie, etc. Im Jahr 1942 führten S. Eilenberg und S. MacLane erstmals die Begriffe *Kategorie*, *Funktor* und *natürliche Transformation* ein[1] — elementare Begriffe der heutigen Kategorientheorie — mit der Absicht, innerhalb der algebraischen Topologie eine einheitliche "Sprache" für Homologie und Cohomologie zu formulieren. Kurze Zeit später erschien der erste Artikel[2], der ausschließlich von Kategorien und Funktoren handelte. Im Laufe der Zeit entwickelte sich dann eine eigenständige "metamathematische" Theorie, welche durch die Untersuchung gemeinsamer Strukturen in verschiedenen mathematischen Theorien versucht, ebendiese Theorien auf einem höheren

[1] In: *Natural Isomorphisms in Group Theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **28**, 537–543, 1942.
[2] *General Theory of Natural Equivalences*, Trans. AMS **58**, 231–294, 1945.

Abstraktionslevel zu charakterisieren. Dabei wird versucht, bestehende Analogien zu identifizieren und zu formalisieren. Daher kann die Kategorientheorie einerseits als eine Art (Meta-) Sprache *über* die Mathematik aufgefasst werden, andererseits auch als ein eigenständiger Teilbereich innerhalb der Mathematik. Es gibt sogar einige Versuche, die Kategorientheorie als Grundlage der Mathematik zu nehmen[3], doch darauf soll hier nicht eingegangen werden. Aufgrund dieses Anspruchs der Kategorientheorie, eine Art Metatheorie darzustellen, ist diese eng mit dem Problem einer hinreichend starken, mengentheoretischen Grundlage der Mathematik verknüpft. Näheres dazu findet sich im zweiten Abschnitt dieser Einleitung.

Ein wichtiges Hilfsmittel der Kategorientheorie stellen Pfeildiagramme dar. Sie ermöglichen die einfache Darstellung komplexer Sachverhalte, dienen zur Beweisführung und unterstützen ein möglichst "elementfreies" Rechnen. Gerade in so genannten konkreten Kategorien wird bewusst *nicht* auf die den Objekten unterliegenden Mengen und deren Elemente zurückgegriffen, sofern dies in einem Beweis möglich ist. Vielmehr wird versucht, Eigenschaften abstrakt mit Hilfe der Morphismen zwischen den Objekten auszudrücken. Dies erleichtert Analogien zu erkennen, Eigenschaften auf andere Kategorien zu verallgemeinern und zu einem besseren Verständnis zu gelangen. Diese relativ hohe Abstraktionsebene macht zum einen die Stärke dieser eleganten Theorie aus, zum anderen erschwert es den Zugang dazu. Daher folgen nun einige motivierende und hoffentlich erhellende Beispiele.

Beispiel 1.1.1 "Produkte" in verschieden Variationen. Seien A_1, A_2, C entweder

(a) Mengen, oder

(b) Gruppen, oder

(c) topologische Räume;

dann gilt in allen drei Fällen: Es existiert eine Menge (bzw. Gruppe, top. Raum) $A_1 \times A_2$, zwei Abbildungen (bzw. Gruppenhomomorphismen, stetige Abb.) $\pi_i : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_i$, $i = 1, 2$, so dass es zu jedem Paar von Abbildungen (bzw. Gruppenhom., stetigen Abb.) $f_1 : C \longrightarrow A_1$, $f_2 : C \longrightarrow A_2$ genau eine Abbildung (bzw. Gruppenhom., stetige Abb.)

$$f : C \longrightarrow A_1 \times A_2$$

mit

$$\pi_1 \circ f = f_1 \quad \text{und} \quad \pi_2 \circ f = f_2$$

gibt. (Natürlich sind π_1 und π_2 die üblichen Projektionen mit $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ und f wird definiert durch $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.) In der Kategorientheorie wird dies mit einem *kommutativen Diagramm*[4] verdeutlicht:

[3] Vgl. MacLane/Moerdijk 1991.

[4] Eine genaue Beschreibung des Begriffs wird in 2.1.2 gegeben. Zunächst verstehen wir unter einem *Diagramm* einfach ein Pfeilschema wie etwa in $(*)$, wobei die Ecken für Mengen, Gruppen, etc. stehen und die Pfeile für die entsprechenden Abbildungen dazwischen. Ein Diagramm *kommutiert*, falls in jedem seiner Teildreiecke das (einzig mögliche) Kompositum zweier Abbildungen die dritte Abbildung ergibt. **In diesem Einleitungskapitel verwenden wir nur kommutative Diagramme.**

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] \arrow[dd, dashed, "\exists!\, f"] & \\
A_1 & & A_2 \\
 & A_1 \times A_2 \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}
\tag{$*$}
$$

Man sagt, es existiert genau ein f, so dass das Diagramm kommutiert und nennt dies eine *universelle Eigenschaft* des Tripels $(A_1 \times A_2, \pi_1, \pi_2)$. Ähnliche bekannte universelle Eigenschaften werden weiter unten noch behandelt. Sie ermöglichen es, Konstruktionen "bis auf Isomorphie" eindeutig zu charakterisieren. Gibt es nämlich in einem der Fälle (a), (b) oder (c) ein entsprechendes Tripel

$$(P, \rho_1 : P \longrightarrow A_1, \rho_2 : P \longrightarrow A_2),$$

welches *dieselbe* universelle Eigenschaft besitzt, so gibt es eine Bijektion (bzw. Isomorphismus, Homöomorphismus) $g : P \longrightarrow A_1 \times A_2$ mit $\pi_i \circ g = \rho_i$, $i = 1, 2$. Man erkennt sofort folgende Analogien:

	Analogien:			kategoriell:
Menge	Gruppe	top. Raum	$\rightsquigarrow$	'Objekt'
$\vert$	$\vert$	$\vert$		$\vert$
Abbildung	Homomorph.	stetige Abb.	$\rightsquigarrow$	'Morphismus'
$\vert$	$\vert$	$\vert$		$\vert$
Bijektion	Isomorph.	Homöomorph.	$\rightsquigarrow$	'Isomorphismus'
$\vert$	$\vert$	$\vert$		$\vert$
kart. Prod.	direkt. Prod.	top. Prod.	$\rightsquigarrow$	'Produkt'

Ein abstrakter, kategorieller Beweis der oben erwähnten Eindeutigkeit bis Isomorphie sieht dann etwa so aus:

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[loop above, "\mathrm{id}_P"] \arrow[dl, "\rho_1"'] \arrow[dr, "\rho_2"] \arrow[dd, dashed, bend left, "f"] & \\
A_1 & & A_2 \\
 & A_1 \times A_2 \arrow[loop below, "\mathrm{id}"] \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] \arrow[uu, dashed, bend left, "g"] &
\end{tikzcd}
$$

Univ. Eigenschaft von $(A_1 \times A_2, \pi_1, \pi_2)$:

$$\exists!\ f: \quad \pi_i \circ f \quad = \quad \rho_i$$

Univ. Eigenschaft von (P, ρ_1, ρ_2):

$$\exists!\ g: \quad \rho_i \circ g \quad = \quad \pi_i$$

Daraus folgt

$$\pi_i \circ (f \circ g) = \pi_i \quad \text{und} \quad \rho_i \circ (g \circ f) = \rho_i.$$

Für id und id_P gilt ebenfalls $\pi_i \circ id = \pi_i$ bzw. $\rho_i \circ id_P = \rho_i$. Wegen der Eindeutigkeit aufgrund der universellen Eigenschaft folgt dann $f \circ g = \mathrm{id}_P$ und $g \circ f = \mathrm{id}$, d.h. $f = g^{-1}$ und $P \cong A_1 \times A_2$.

(Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde für $\mathrm{id}_{A_1 \times A_2}$ kurz id geschrieben.) Man beachte, dass dieser Beweis völlig unabhängig ist von den speziellen Eigenschaften wie etwa ‘Gruppe sein´, ‘topologische Struktur besitzen´, etc. Man beweist in einem Streich einen Satz für verschiedene Gebiete der Mathematik!

Beispiel 1.1.2 (‘Dualität’) Die im Diagramm $(*)$ ausgedrückte universelle Eigenschaft definiert abstrakt ein ‘Produkt’, welches in den drei beschriebenen Fällen die jeweils bekannte Konstruktion liefert. Die Idee der *Dualität* bzw. des *dualen Begriffes* zu einem kategoriellen Begriff — wie etwa dem des Produktes — lässt sich sehr anschaulich an eben diesem Beispiel verdeutlichen. Grob gesprochen, geht der duale Begriff aus dem ursprünglichen durch Umkehrung aller beteiligten Pfeile hervor. Dies liefert in diesem Fall die folgende universelle Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "\mu_1"'] & & A_2 \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[dl, "\mu_2"] \\ & A_1 + A_2 \arrow[uu, dashed, "\exists! f"'] & \end{tikzcd} \qquad \forall (f_i : A_i \longrightarrow C)_{i=1,2}\ \exists! f :\ f \circ \mu_i = f_i$$

Was ergibt das in den drei betrachteten Fällen?

(a): Disjunkte Vereinigung zweier Mengen.

(b): Freies Produkt zweier Gruppen.

(c): Topologische Summe zweier topologischer Räume.

Kategoriell wird dies als *Coprodukt* $(\mu_1, \mu_2, A_1 + A_2)$ bezeichnet. Die Vorsilbe ‘Co-’ verdeutlicht, dass dieser Begriff durch *dualisieren* aus dem Begriff des Produktes hervorgegangen ist.

Beispiele 1.1.3 (‘Universelle Pfeile’) Wir betrachten einige bekannte Beispiele aus (linearer) Algebra und Topologie, die das kategorielle Konzept der *universellen Pfeile* verdeutlichen sollen.

(1) Freie Objekte (Algebra): Sei X eine (abelsche) Gruppe bzw. ein Ring und $B \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißt bekanntlich X *frei über* B, falls gilt:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "\forall\ f"'] & X \arrow[d, dashed, "\exists!_{\mathrm{Hom.}}\ f^*"] \\ & Y \ \text{ab. Grp. bzw. Ring} \end{tikzcd}$$

Im Falle von Vektorräumen bzw. Moduln wird dies entsprechend formuliert.

(2) Tensorprodukt von Vektorräumen (lin. Alg.): Seien U, V, W (endlich dimensionale) Vektorräume, dann ist das Tensorprodukt $U \otimes V$ von U mit V ein Vektorraum, der folgende

universelle Eigenschaft erfüllt: Es gibt einen Homomorphismus $g : U \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, U \otimes V)$ mit

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\forall_{\mathrm{Hom.}}\ f"'] & \mathrm{Hom}(V, U \otimes V) \arrow[d, "f^* \circ (\_)"] \\ & \mathrm{Hom}(V, W) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \otimes V \arrow[d, dashed, "\exists!_{\mathrm{Hom.}}\ f^*"] \\ W \end{tikzcd}$$

(Man beachte, dass $\mathrm{Hom}(\_, \_)$ als Vektorraum aufgefasst wird.) Dabei ist g definiert durch

$$(g(u))(v) := u \otimes v \quad \text{für } u \in U, v \in V,$$

und zu f wird folgendes f^* auf den Basiselementen definiert:

$$f^*(u \otimes v) := (f(u))(v).$$

(3) Čech-Stone-Kompaktifizierung (Topologie): Sei X ein vollständig regulärer topologischer Raum (der damit auch T_2 ist), dann gibt es einen *kompakten* T_2-Raum βX und eine stetige Abbildung $\beta : X \longrightarrow \beta X$ mit der folgenden universellen Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\forall_{\mathrm{stetig}}\ f"'] & \beta X \arrow[d, dashed, "\exists!_{\mathrm{stetig}}\ f^*"] \\ & Y \quad \text{komp. } T_2 \end{tikzcd}$$

(4) Abelsche Reflektion (Algebra): Sei G eine Gruppe, dann gibt es eine abelsche Gruppe A_G und einen Gruppenhomomorphismus $r_G : G \longrightarrow A_G$ mit:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "r_G"] \arrow[dr, "\forall_{\mathrm{Hom.}}\ f"'] & A_G \arrow[d, dashed, "\exists!_{\mathrm{Hom.}}\ f^*"] \\ & A \quad \text{ab. Grp.} \end{tikzcd}$$

Dabei ist A_G der Quotient $G/[G, G]$, wobei $[G, G]$ den Kommutator von G bezeichnet.

Die in allen Beispielen auftretenden waagerechten Pfeile sind Beispiele für so genannte *universelle Pfeile*, die eng mit dem wichtigen kategoriellen Konzept der *adjungierten Situationen* verknüpft sind, wie wir noch sehen werden. Man nennt dann die Paare (ι, X), $(g, U \otimes V)$, $(\beta, \beta X)$ und (r_G, A_G) universelle Pfeile für die entsprechenden Objekte B, U, X, und G. Scheinbar hebt sich Beispiel (2) dadurch hervor, dass der Zielbereich des universellen Pfeils nicht $U \otimes V$, sondern $\mathrm{Hom}(V, U \otimes V)$ ist. Wie wir später erkennen werden, liegt das daran, dass ein universeller Pfeil sich auf einen so genannten *Funktor* bezieht, d.h. auf das Objekt $U \otimes V$ wird noch der Funktor $\mathrm{Hom}(V, \_)$ angewendet. Beim Beispiel (1) bzw. (3),(4) ist dieser Funktor U bzw. E jedoch ein so genannter Vergissfunktor (U) bzw. Einbettungsfunktor (E), der aus Gründen der Übersichtlichkeit notationell unterdrückt wird. Vollständigerweise müsste es etwa in (4) $E(A_G)$ statt A_G, $E(f^*)$ statt f^* und $E(A)$ statt A heißen. Somit unterscheiden sich die vier Beispiele nicht in ihrer kategoriellen Struktur.

1.2 Grundlagen/Mengenlehre

Wie bereits erwähnt, benötigt man eine hinreichend starke mengentheoretische Grundlage, um Kategorientheorie sinnvoll betreiben zu können. Dazu gibt es einige befriedigende Ansätze, die teilweise verschiedenen Ansprüchen genügen. Die mengentheoretischen Details dieser verschiedenen Ansätze sollen uns hier nicht weiter beschäftigen. Vielmehr skizzieren wir im folgenden kurz den von uns gewählten ontologischen Standpunkt, der eine solide Grundlage darstellt und von vielen Autoren favorisiert wird. Es soll von nun an stillschweigend verwendet werden und uns als sorgfältig gewähltes Fundament zur Verfügung stehen.

Unsere Grundannahme ist, dass es ein Modell für das *Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem mit Auswahlaxiom* ($\mathcal{ZFC}$) gibt. Außerdem, dass darin eine hinreichend große Menge $\mathcal{U}$, das so genannte (Mengen-) Universum, existiert, die unter den üblichen mengentheoretischen Konstruktionen abgeschlossen ist. So sollte $\mathcal{U}$ etwa die Menge der natürlichen Zahlen ω enthalten, für je zwei Mengen $u, v \in \mathcal{U}$ sollten $\{u, v\}$, (u, v) und $u \times v$ Elemente von $\mathcal{U}$ sein, für $x \in u \in \mathcal{U}$ sollte $x \in \mathcal{U}$ gelten, usw. Dann unterscheiden und betrachten wir *ausschließlich* die folgenden beiden Arten von Entitäten:

- Klassen: Teilmengen $A \subset \mathcal{U}$.
- Mengen: Elemente $u \in \mathcal{U}$.

Dies ist eine recht intuitive Vorgehensweise: Alles, was sich außerhalb unseres Universums befindet, existiert für uns nicht! Da in $\mathcal{ZFC}$ natürlich nur über Mengen geredet werden kann, bezeichnen einige Autoren die Elemente $u \in \mathcal{U}$ als *kleine Mengen* im Unterschied zu den übrigen Mengen. Offenbar gilt nach dem *Regularitätsaxiom* $\mathcal{U} \notin \mathcal{U}$, so dass in unserer Sprechweise das Universum $\mathcal{U}$ *keine* Menge ist! Wegen der geforderten Abschlusseigenschaft

$$x \in u \in \mathcal{U} \implies x \in \mathcal{U}$$

gilt natürlich auch

$$u \in \mathcal{U} \implies u \subset \mathcal{U}.$$

Daher gilt:

Jede Menge ist eine Klasse, jedoch *nicht* umgekehrt.

Man nennt daher auch $A \subset \mathcal{U}$ eine *echte Klasse* ('proper class'), falls A keine Menge ist. So ist etwa die Klasse aller Mengen eine echte Klasse, nämlich gerade $\mathcal{U}$. Die Unterscheidung in Mengen und Klassen hilft in der axiomatischen Mengenlehre, die bekannten Antinomien und Probleme der naiven Mengenlehre zu überwinden, wie sie sich etwa aus der Annahme einer 'Menge aller Mengen' oder ähnlichem ergeben. Abschließend sollen die folgenden beiden bekannten Slogans dabei helfen, den Unterschied zwischen Mengen und Klassen zu verdeutlichen:

> "Klassen sind Teilbereiche des Universums, Mengen dessen Elemente."

> "Mengen sind Klassen, die als Element einer anderen Klasse auftreten."
> (Denn es gilt $B \in A \subset \mathcal{U} \implies B \in \mathcal{U}$.)

1.3 Literaturhinweise

Hier seien nur einige wenige Werke aufgeführt, die relativ gut als Einführungsliteratur für Anfänger geeignet sind. Die ersten Kapitel von 1. in a) dienten als inhaltlicher Leitfaden der Vorlesung.
a) Zur Einführung in die Kategorientheorie:

1. H. Herrlich, G. E. Strecker: *Category Theory*, Heldermann Verlag Berlin, 1979. [Sehr gut zum Selbststudium geeignet, insbesondere für Anfänger. Ist in der Lehrbuchsammlung der SuUB vorhanden.]

2. J. Adámek, H. Herrlich, G. E. Strecker: *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats*, John Wiley and Sons, 1990. [Demnächst auch als Online-Version erhältlich.]

3. D. Pumplün: *Elemente der Kategorientheorie*, Spektrum-Verlag, 1999. [Positiv: Leicht verständlich, einfach zu lösende Übungsaufgaben im laufenden Text integriert. Negativ: Objektfreie Definition der Kategorie.]

Weiterführende Literatur:

4. F. Borceaux: *Handbook of Categorical Algebra*, Cambridge University Press, 1994.

5. S. Mac Lane: *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, 1971 bzw. 1998. [Empfehlenswert für Fortgeschrittene.]

6. S. Mac Lane, I. Moerdijk: *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer Verlag, 1992.

b) Mengenlehre / Grundlagen der Mathematik:

1. M. Deutsch: *Einführung in die Grundlagen der Mathematik*, Uni-Druckerei Bremen, 1999. [Insgesamt etwas schwierig zu lesen, Kapitel 5.1 bis 5.15 bieten jedoch trotzdem einen guten Überblick.]

2. P. R. Halmos: *Naive Mengenlehre*, Göttingen, 1976. [Trotz des Titels eine sehr zu empfehlende Einführung in die (axiomatische) Mengenlehre.]

3. Das Kapitel II und der Appendix von 1. in a) bieten eine gute Übersicht der verschiedenen mengentheoretischen Möglichkeiten zur Grundlegung der Kategorientheorie. Für Leser mit etwas Erfahrung in axiomatischer Mengenlehre ist dort alles wesentliche zu finden.

Kapitel 2

Kategorien

2.1 Definition und Beispiele

Definition 2.1.1 Eine *Kategorie* $\mathbf{C}$ ist ein 6-Tupel

$$\mathbf{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{id}, \cdot)$$

wobei gilt

(1) $\mathcal{O}$ ist eine Klasse, deren Elemente als $\mathbf{C}$-*Objekte* $A, B, C, \ldots$ etc. bezeichnet werden (Notation: $\mathrm{ob}(\mathbf{C}) := \mathcal{O}$);

(2) $\mathcal{M}$ ist eine Klasse, deren Elemente als $\mathbf{C}$-*Morphismen* $f, g, h, \ldots$ etc. bezeichnet werden (Notation: $\mathrm{mor}(\mathbf{C}) := \mathcal{M}$);

(3) $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} : \mathrm{mor}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ sind Operationen (d.h. Abbildungen zwischen Klassen); man schreibt kurz

$$\text{‘}f : A \longrightarrow B\text{'} \text{ oder ‘}A \xrightarrow{f} B\text{'} \quad \text{für} \quad \text{‘}\,\mathrm{dom}(f) = A, \mathrm{cod}(f) = B\text{'}$$

und nennt A den *Domain* bzw. B den *Codomain* von f;

(4) $\mathrm{id} : \mathrm{ob}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ ist eine Operation, genannt *Identität*, mit $\mathrm{id}(A) : A \longrightarrow A$ (Notation: $\mathrm{id}(A) =: \mathrm{id}_A$, manchmal auch 1_A);

(5) $\cdot : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ ist eine Operation, genannt *Komposition*, mit

$$\mathcal{D} := \{(g, f) \in \mathrm{mor}(\mathbf{C}) \times \mathrm{mor}(\mathbf{C}) \mid \mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)\}$$

und $\cdot(g, f) =: g \cdot f$ oder kurz gf (Sprechweise: ‘$g \cdot f$ definiert’ g.d.w. ‘$(g, f) \in \mathcal{D}$’);

so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(M) *Matching condition*:

$$(g, f) \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{dom}(g \cdot f) = \mathrm{dom}(f) \ \wedge \ \mathrm{cod}(g \cdot f) = \mathrm{cod}(g)$$

d.h.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\cdot f"'] & & C \end{tikzcd}$$

kommutiert stets;

(A) *Associativity*:

$$(g, f), (h, g) \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$$

d.h.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r, "h\cdot g"] \arrow[d, "g"] & D \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g\cdot f"'] & C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert stets;

(U) *Unit law*:

$$(\mathrm{id}_B, f), (g, \mathrm{id}_B) \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{id}_B \cdot f = f \ \wedge \ g \cdot \mathrm{id}_B = g$$

d.h. id_B ist eine *Einheit* (oder auch *Identität*) und

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dr, "g"] & \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

kommutiert stets;

(S) *Smallness condition*: für jedes Paar (A, B) von $\mathbf{C}$-Objekten ist die Klasse

$$\mathbf{C}(A, B) := \hom_{\mathbf{C}}(A, B) := \{f \in \mathrm{mor}(\mathbf{C}) \mid f : A \longrightarrow B\}$$

eine Menge.

Bemerkung 2.1.2 (i) In der Kategorientheorie werden häufig Diagramme zur Veranschaulichung bzw. Beweisführung verwendet. Dadurch werden Beweise übersichtlicher und strukturell verständlicher im Gegensatz zu Beweisen mit langen Gleichungen. Ein Diagramm besteht dabei aus *Ecken* (häufig mit '$\bullet$' oder einem Objektnamen versehen) und *Pfeilen* (oft mit Morphismennamen markiert) zwischen Ecken. Im Einleitungskapitel sind schon verschiedene Beispiele für Diagramme vorgekommen. Man sagt, ein Diagramm ist *kommutativ* oder *kommutiert*, falls gilt: Für jedes Paar von Ecken A, B des Diagramms ergibt die Komposition $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ aller Morphismen entlang eines beliebigen Pfades von Pfeilen

$$A \xrightarrow{f_n} \bullet \longrightarrow \ldots \longrightarrow \bullet \xrightarrow{f_1} B$$

stets denselben Morphismus $A \longrightarrow B$.

(ii) Die Objekte $\mathrm{ob}(\mathbf{C})$ einer Kategorie $\mathbf{C}$ und die Einheiten von $\mathbf{C}$ stehen in eineindeutiger Beziehung zueinander:

Zu jedem **C**-Objekt B existiert *genau ein* **C**-Morphismus id_B, der (U) erfüllt.

Ist nämlich $u : B \longrightarrow B$ ein weiterer solcher **C**-Morphismus, so folgt aus (U) für id_B und u:

$$\mathrm{id}_B = u \cdot \mathrm{id}_B = u.$$

Daher gibt es eine 1 : 1-Korrespondenz $B \longleftrightarrow \mathrm{id}_B$ und id_B ist *die* eindeutig bestimmte **C**-Identität von B. Daher ist die Operation id eindeutig durch die anderen Daten festgelegt. Außerdem ermöglicht diese Korrespondenz eine objektfreie Definition von Kategorien, was den Autoren etwas kontraintuitiv erscheint, aber auch Vorteile bietet, da einige Beweise erheblich einfacher werden (vgl. Literatur: Pumplün 1999).

Definition 2.1.3 Eine Kategorie **C** heißt

(1) *klein*, falls **C** (d.h. $\mathrm{ob}(\mathbf{C})$ und $\mathrm{mor}(\mathbf{C})$) eine Menge ist;

(2) *diskret*, falls $\mathrm{mor}(\mathbf{C}) = \mathrm{id}[\mathrm{ob}(\mathbf{C})]$ gilt;

(3) *zusammenhängend* ('connected'), falls stets $\mathbf{C}(A, B) \neq \emptyset$ gilt.

Beispiele 2.1.4 (1) **Set**: Kategorie der *Mengen* $X, Y, \ldots$ (Objekte) und der *Abbildungen* $f : X \longrightarrow Y, \ldots$ (Morphismen) dazwischen. Natürlich ist dann $\mathrm{dom}(f) := X$, $\mathrm{cod}(f) := Y$ und die Komposition '$\cdot$' ist die übliche Komposition von Abbildungen. Wie die Notation nahe legt, ist für ein Objekt X, d.h. eine Menge, id_X die identische Abbildung auf X: $\mathrm{id}_X : x \mapsto x$.

(2) **Grp**: Kategorie der *Gruppen* (Objekte) und *Gruppenhomomorphismen* (Morphismen) dazwischen. Restliche Daten wie in **Set**.

(3) **Top**: Kategorie der *topologischen Räume* (Objekte) und *stetigen Abbildungen* (Morphismen) dazwischen. Restliche Daten wie in **Set**.

(4) **R-Mod** (R ein Ring): Kategorie der *Links-R-Moduln* (Objekte) und *Modulhomomorphismen* (Morphismen) dazwischen. Restliche Daten wie in **Set**. (Analog: **Mod-R**.)

(5) **POS** ('partially ordered sets'): Kategorie der *partiell geordneten Mengen* (Objekte) und *monotonen Abbildungen* (Morphismen) dazwischen. Restliche Daten wie in **Set**.

(6) **Lat**: Kategorie der *Verbände* (Objekte) und *Verbandshomomorphismen* (Morphismen) dazwischen. Restliche Daten wie in **Set**.

(7) **Ab**: Kategorie der *abelschen Gruppen* (Objekte) und *Gruppenhomomorphismen* (Morphismen) dazwischen. Restliche Daten wie in **Set**.

(8) **Rng**: Kategorie der *Ringe* (Objekte) und *Ringhomomorphismen* (Morphismen) dazwischen. Restliche Daten wie in **Set**. (Analog: **Field** (*Körper*) und **Ring** (*Ringe mit Eins*).)

(9) **Rel**: Kategorie der *Mengen* (Objekte) und *Relationen* (Morphismen), d.h. für Mengen A, B ist $r : A \longrightarrow B$ genau dann ein **Rel**-Morphismus, wenn $r \subset A \times B$ gilt. Und die Komposition? $\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe.

(10) Jede *prä-geordnete Klasse* $(X, \leq)$ (d.h. X ist eine Klasse und $\leq \subset X \times X$ eine reflexive und transitive Relation) lässt sich als Kategorie $\mathbf{X}$ auffassen: Setze $\mathrm{ob}(\mathbf{X}) := X$ und für $x, y \in X$ gibt es genau einen Morphismus $x \longrightarrow y$, wenn $x \leq y$ ist. Damit ist auch die Komposition von Morphismen festgelegt, denn nach Transitivität folgt aus $x \leq y$ und $y \leq z$ auch $x \leq z$. Die Reflexivität garantiert die Existenz der Identitäten $x \longrightarrow x$. Insbesondere lässt sich jede Klasse X mit der diskreten Ordnung $\Delta_X = \{(x,x) | x \in X\}$ versehen und als Kategorie auffassen. Dies sind genau die diskreten Kategorien.

(11) Ein Monoid $(M, \cdot, e)$ lässt sich folgendermaßen als Kategorie $\mathbf{M}$ auffassen: Setze $\mathrm{ob}(\mathbf{M}) := 1 = \{\bullet\}$ und $\mathrm{mor}(\mathbf{M}) := M$, d.h. jedes Element $m \in M$ gibt einen $\mathbf{M}$-Morphismus $\bullet \xrightarrow{m} \bullet$ und für $m, n \in M$ ist ihr Produkt $m \cdot n \in M$ das Kompositum der Morphismen m und n.

(12) Natürlich gibt es auch *endliche Kategorien*, wie etwa

$$\mathbf{0} = \emptyset \quad \text{leere Kategorie}$$

$$\mathbf{1} = \bullet$$

$$\mathbf{2} = {}^0\bullet \longrightarrow \bullet^1$$

$$\mathbf{3} = \begin{tikzcd} {}^0\bullet \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bullet^1 \\ & \bullet_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\mathbf{4} = \begin{tikzcd} {}^0\bullet \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & \bullet^1 \arrow[ddl] \\ & \bullet_2 \arrow[ur] \arrow[d] & \\ & \bullet_3 & \end{tikzcd}$$

usw. oder etwa

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr, shift left] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[ll, shift left] \arrow[dl] \\ & \bullet & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}.$$

Man beachte, dass es sich bei den Beispielen (1)-(9) um echte Klassen handelt und nur (11) und (12) Beispiele kleiner Kategorien sind (im Sinne obiger Definition). Beim Beispiel (10) hängt dies davon ab, ob das dortige X eine echte Klasse oder eine Menge ist.

Die obigen Beispiele zeigen, wie viele verschiedene mathematische Bereiche von der Kategorientheorie erfasst werden. Mengen und Abbildungen hatten sicherlich einen motivierenden Einfluss auf die Definition des Begriffs der Kategorie, was auch an der Notation deutlich wird. Damit werden dann auch diejenigen mathematischen Bereiche abgedeckt, deren Betrachtungsobjekte Mengen mit einer zusätzlichen Struktur und spezielle, Struktur erhaltende Abbildungen sind (wie etwa in Beispiel (2)-(8)). Auch prä-geordnete Klassen und Monoide können kategoriell beschrieben werden, wie die Beispiel (10) und (11) zeigen. Darüberhinaus ist der Begriff 'Kategorie' relativ "algebraisch" und erlaubt somit einige Standardkonstruktionen (siehe nächster Abschnitt). Bei alledem sollte stets im Auge behalten werden, dass zu einer kategoriellen Beschreibung immer *zwei* Grundbegriffe — Objekt *und* Morphismus —

gehören. Diese Maxime wird unter Kategorientheoretikern gerne als *kategorieller Imperativ* bezeichnet[1], erhebt jedoch nicht denselben moralischen Anspruch wie der Namensgeber aus der Philosophie.

2.2 Konstruktionen mit Kategorien

Wie wir gesehen haben, lässt sich der Begriff *Kategorie* relativ “algebraisch” definieren, so dass sich offensichtlich folgende Konstruktionen in vernünftiger Weise durchführen lassen:

- *Unterkategorie* $\mathbf{B}$ von $\mathbf{C}$: $\mathrm{ob}(\mathbf{B}) \subset \mathrm{ob}(\mathbf{C})$, $\mathrm{mor}(\mathbf{B}) \subset \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ und die Operationen $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{id}, \cdot$ in $\mathbf{B}$ sind die Einschränkungen der entsprechenden Operationen in $\mathbf{C}$. Für $A, B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$ gilt dann

  $$\mathbf{B}(A, B) \subset \mathbf{C}(A, B).$$

  Falls für alle Paare A, B von $\mathbf{B}$-Objekten auch $\mathbf{B}(A, B) \supset \mathbf{C}(A, B)$ gilt, so heißt $\mathbf{B}$ *volle Unterkategorie* von $\mathbf{C}$.

- *Quotientenkategorie* bzgl. einer Kongruenz.

- *Produktkategorie* $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$: Die Morphismenklasse ist $\mathrm{mor}(\mathbf{B}) \times \mathrm{mor}(\mathbf{C})$, die Objektklasse $\mathrm{ob}(\mathbf{B}) \times \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ und es wird punktweise verknüpft.

- *Summenkategorie* $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ (disjunkte Vereinigung).

Wir verzichten an dieser Stelle auf eine detaillierte Behandlung dieser Konstruktionen, da im Folgenden nur der Begriff *Unterkategorie* benötigt wird, welcher durch die obige Skizzierung ausreichend erklärt sein dürfte.

Definition 2.2.1 Zu jeder Kategorie $\mathbf{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{id}, \cdot)$ ist die *duale Kategorie* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ definiert durch

$$\mathbf{C}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, \mathrm{cod}, \mathrm{dom}, \mathrm{id}, \star),$$

wobei

$$f \star g \text{ in } \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \quad :\Longleftrightarrow \quad g \cdot f \text{ in } \mathbf{C}.$$

Man beachte, dass die Operationen ‘dom’ und ‘cod’ vertauscht werden, d.h. “alle Pfeile werden umgedreht”:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \text{ in } \mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad C \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A \text{ in } \mathbf{C}^{\mathrm{op}}.$$

Das Konzept der *Dualität* ist in der Kategorientheorie von besonderer Bedeutung, wie noch deutlich werden wird. Zunächst seien noch zwei Konstruktionen erwähnt, wobei die zweite interessant in bezug auf Dualität ist:

[1]Natürlich in Anlehnung an den berühmten *kategorischen Imperativ* Immanuel Kants.

- *Pfeilkategorie* $\mathbf{C}^\mathbf{2}$: Objekte sind alle $\mathbf{C}$-Morphismen und die Morphismen in $\mathbf{C}^\mathbf{2}$ sind Paare

  $$(a,b) : (A \xrightarrow{f} B) \longrightarrow (C \xrightarrow{g} D)$$

  von $\mathbf{C}$-Morphismen $a : A \longrightarrow C$, $b : B \longrightarrow D$, für die

  $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "b"'] & D \end{tikzcd}$$

  kommutiert. Die Komposition von Morphismen ist punktweise definiert.

- *Kommakategorie*: Zu jedem $\mathbf{C}$-Objekt A gibt es eine Kategorie $A \downarrow \mathbf{C}$, deren Objekte $\mathbf{C}$-Morphismen $A \xrightarrow{f} B$, $A \xrightarrow{g} C, \dots$ mit Domain A sind und deren Morphismen $h : (A \xrightarrow{f} B) \longrightarrow (A \xrightarrow{g} C)$ $\mathbf{C}$-Morphismen $h : B \longrightarrow C$ sind, für die

  $$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ B \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

  kommutiert. Die Komposition der Morphismen findet in $\mathbf{C}$ statt. Analog definiert man $\mathbf{C} \downarrow A$, wobei dort die Objekte $\mathbf{C}$-Morphismen $B \xrightarrow{f} A$ mit *Codomain* A sind. Dafür gilt dann $\mathbf{C} \downarrow A = (A \downarrow \mathbf{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ ($\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe!).

Bemerkung 2.2.2 (Dualität) Offenbar gilt

$$\mathbf{C} = (\mathbf{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}.$$

Ein Beispiel soll verdeutlichen, wie man zu einer "kategoriellen" Aussage S eine *duale Aussage* S^{op} bekommt.

Sei zunächst P eine Eigenschaft einer Kategorie $\mathbf{C}$, die nur mittels Objekten und Morphismen ausgedrückt werden kann. Die *duale Eigenschaft* P^{op} ist dann die P entsprechende Eigenschaft in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, dargestellt in $\mathbf{C}$. Mit anderen Worten: P^{op} geht aus P durch "umdrehen von Pfeilen" hervor. Sei etwa X ein $\mathbf{C}$-Objekt und

$$P(X) \quad \equiv \quad \forall\, Y \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})\ \exists!\ Y \xrightarrow{f} X \in \mathrm{mor}(\mathbf{C}).$$

Dann ist die $P(X)$ entsprechende Eigenschaft in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$:

$$\forall\, Y \in \mathrm{ob}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})\ \exists!\ Y \xrightarrow{f} X \in \mathrm{mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})$$

und diese wiederum ausgedrückt in $\mathbf{C}$ lautet:

$$P^{\mathrm{op}}(X) \quad \equiv \quad \forall\, Y \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})\ \exists!\ X \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{mor}(\mathbf{C}).$$

In $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$ etwa bedeutet das:

$$\begin{array}{rcl} P(X) & \iff & X = 1 \\ P^{\mathrm{op}}(X) & \iff & X = \emptyset \end{array}$$

Häufig bekommt ein dualer Begriff die Vorsilbe 'Co-', wie z.B. im Einleitungskapitel:

$$(A_1 \times A_2, \pi_1, \pi_2) \text{ Produkt in } \mathbf{C} \quad \iff \quad (\pi_1, \pi_2, A_1 \times A_2) \text{ Coprodukt in } \mathbf{C}^{\mathrm{op}}$$

Man nennt eine Eigenschaft P *selbstdual*, falls $P = P^{\mathrm{op}}$ gilt. Ist nun S eine "kategorielle" Aussage (in der "kategorielle" Eigenschaften vorkommen mögen), so hat man per Definition

$$S^{\mathrm{op}} \text{ gilt in } \mathbf{C} \iff S \text{ gilt in } \mathbf{C}^{\mathrm{op}}$$

und damit schließlich das folgende *Dualitätsprinzip*:

Gilt eine "kategorielle" Aussage S in *jeder* Kategorie, so gilt auch die duale Aussage S^{op} in jeder Kategorie.

Beim dualisieren von Aussagen sollte man sehr vorsichtig sein, denn hier schleichen sich oft Fehler ein, besonders wenn die duale Aussage anders aussieht als erwartet.

2.3 Spezielle Morphismen und Objekte

Definition 2.3.1 (1) Ein $\mathbf{C}$-Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ heißt *Retraktion* in $\mathbf{C}$ (oder auch $\mathbf{C}$-*Retraktion*), falls es einen $\mathbf{C}$-Morphismus $B \xrightarrow{g} A$ mit $f \cdot g = \mathrm{id}_B$ gibt (d.h. falls f ein *Rechtsinverses* besitzt).

(2) Ein $\mathbf{C}$-Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ heißt *Schnitt* in $\mathbf{C}$ (oder $\mathbf{C}$-*Schnitt*, *Co-Retraktion* in $\mathbf{C}$), falls es einen $\mathbf{C}$-Morphismus $B \xrightarrow{g} A$ mit $g \cdot f = \mathrm{id}_A$ gibt (d.h. falls f ein *Linksinverses* besitzt).

(3) Ein $\mathbf{C}$-Morphismus heißt *Isomorphismus* in $\mathbf{C}$ (oder $\mathbf{C}$-*Isomorphismus*), falls er eine $\mathbf{C}$-Schnitt und -Retraktion ist.

Bemerkung 2.3.2 (i) Offenbar sind 'Retraktion' und 'Schnitt' zueinander duale Begriffe. Sei nämlich $S(f, \mathbf{C})$ die Aussage 'f ist ein $\mathbf{C}$-Schnitt', so lautet diese in $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$:

$$\begin{array}{rcl} S(f, \mathbf{C}) & \equiv & f \in \mathrm{mor}(\mathbf{C}) \wedge \exists g \in \mathrm{mor}(\mathbf{C}) : \;\; g \cdot f \text{ ist } \mathbf{C}\text{-Identität} \\ S(f, \mathbf{C}^{\mathrm{op}}) & \equiv & f \in \mathrm{mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}}) \wedge \exists g \in \mathrm{mor}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}}) : \;\; g \star f \text{ ist } \mathbf{C}^{\mathrm{op}}\text{-Identität} \end{array}$$

Dann ist die duale Aussage dazu:

$$S^{\mathrm{op}}(f, \mathbf{C}) \;\equiv\; f \in \mathrm{mor}(\mathbf{C}) \wedge \exists g \in \mathrm{mor}(\mathbf{C}) : \;\; f \cdot g \text{ ist } \mathbf{C}\text{-Identität}$$

was bedeutet, dass f eine $\mathbf{C}$-Retraktion ist.
(ii) Nach (i) ist 'Isomorphismus' ein selbstdualer Begriff.

Beispiele 2.3.3 (1) Ein Morphismus f in $\mathbf{Set}$ ist genau dann ein Schnitt (bzw. eine Retraktion), wenn f injektiv ist und $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$ gilt (bzw. wenn f surjektiv ist).

(2) Sei $A \xrightarrow{f} B$ ein Morphismus in **R-Mod**. Dann ist f genau dann ein Schnitt in **R-Mod**, wenn f injektiv ist und $f[A]$ direkter Summand von B ist. Weiterhin ist f genau dann eine Retraktion, wenn es eine Projektion $p : A \longrightarrow S$ auf einen Untermodul $S \subset A$ und einen Isomorphismus $h : S \longrightarrow B$ gibt mit $f = h \cdot p$.

(3) Sei $X \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{mor}(\mathbf{Top})$. Dann ist f genau dann eine **Top**-Schnitt, wenn f eine topologische Einbettung ist und $f[X]$ ein Retrakt von Y (d.h. es gibt stetiges $r : Y \longrightarrow f[X]$ mit $r|_{f[X]} = \mathrm{id}$). Andererseits ist f genau dann eine **Top**-Retraktion, wenn es einen Homöomorphismus h und eine topologische Retraktion r gibt mit $f = h \cdot r$.

Satz 2.3.4 (1) $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C$ **C**-Schnitte $\Longrightarrow A \xrightarrow{gf} C$ **C**-Schnitt.

(2) $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C$ **C**-Retraktionen $\Longrightarrow A \xrightarrow{gf} C$ **C**-Retraktion.

Beweis: Einfach. ✓

Aus der Dualität der Begriffe folgt (1) $\Longrightarrow$ (2) und damit auch (2) $\Longrightarrow$ (1). Gilt etwa (1) und sind f, g wie in (2) **C**-Retraktionen, so sind f, g $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$-Schnitte und damit auch $f \star g$ nach (1). Also ist $g \cdot f$ eine **C**-Retraktion. Nach obigem Satz sind offenbar auch Isomorphismen unter Komposition abgeschlossen.

Satz 2.3.5 Sind $f, g \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$, so dass $g \cdot f$ definiert und ein **C**-Schnitt ist, so ist f auch ein **C**-Schnitt.

Beweis: Ist $g \cdot f$ ein **C**-Schnitt, so gibt es $h \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ mit $(h \cdot g) \cdot f = h \cdot (g \cdot f) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$, d.h. $h \cdot g$ ist Linksinverses zu f. ✓

Der folgende Satz ist die duale Version des vorigen:

Satz 2.3.6 Sind $f, g \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$, so dass $g \cdot f$ definiert und eine **C**-Retraktion ist, so ist g auch eine **C**-Retraktion.

Beweis: Folgt durch Dualisieren aus 2.3.5. ✓

Im Laufe der Zeit werden wir immer weniger auf die dualen Begriffe eingehen. Jede Definition bzw. jeder Satz beinhaltet dann stillschweigend eine duale Definition bzw. verbirgt eine duale Aussage, die dann selbstverständlich auch gilt und benutzt werden wird.

Satz 2.3.7 Für $f \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ sind äquivalent:

(1) f ist Isomorphismus in **C**;

(2) f hat in **C** genau ein Rechtsinverses h und genau ein Linksinverses g und es gilt $g = h$.

Beweis:

(2) $\Rightarrow$ (1): Klar.

(1) $\Rightarrow$ (2): Es gilt $g = g\,\mathrm{id}_{\mathrm{cod}(f)} = g(fh) = (gf)h = 1_{\mathrm{dom}(f)}h = h$. ✓

Bemerkung 2.3.8 (i) Wegen der Eindeutigkeit spricht man auch von *dem* inversen Morphismus zu einem Isomorphismus f und bezeichnet diesen mit f^{-1}. Offenbar ist auch f^{-1} ein Isomorphismus und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

(ii) Zwei Objekte A, B nennt man auch **C**-*isomorph*, falls es eine **C**-Isomorphismus $f : A \longrightarrow B$ gibt; Bezeichnung: $A \cong B$. $\rightsquigarrow$ 'isomorph sein zu' gibt eine *Äquivalenzrelation* auf $\mathrm{ob}(\mathbf{C})$.

Definition 2.3.9 Sei $\mathbf{B}$ eine Unterkategorie von $\mathbf{C}$.

(1) $\mathbf{B}$ heißt *dichte* Unterkategorie von $\mathbf{C}$, falls gilt:

$$\forall\, C \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})\ \exists\, B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B}) : \quad B \cong C \text{ in } \mathbf{C}.$$

(2) $\mathbf{B}$ heißt *Isomorphismen-abgeschlossen* (kurz *iso-abgeschlossen*), falls gilt:

$$C \in \mathrm{ob}(\mathbf{C}), B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B}) \text{ und } C \cong B \quad \Longrightarrow \quad C \in \mathrm{ob}(\mathbf{B}).$$

Beispiele 2.3.10 (1) Die Isomorphismen in **Set** sind genau die bijektiven Abbildungen.

(2) Die Isomorphismen in **Grp** sind genau die Gruppenisomorphismen.

(3) Die Isomorphismen in **Top** sind genau die Homöomorphismen.

(4) Die Kategorie aller Kardinalzahlen und Abbildungen dazwischen ist dicht in **Set**.

(5) Ist K ein Körper, so ist die volle Unterkategorie der endlichen Potenzen K^n eine dichte Unterkategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume über K.

(6) Eine volle Unterkategorie $\mathbf{B}$ von $\mathbf{C}$ ist genau dann dicht und Iso-abgeschlossen in $\mathbf{C}$, wenn $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ gilt.

Definition 2.3.11 (1) Ein Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ heißt *Monomorphismus* in $\mathbf{C}$ (oder kurz $\mathbf{C}$-*Mono*), falls für alle $h, k \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ mit $f \cdot h = f \cdot k$ auch $h = k$ gilt (d.h. falls f bzgl. '$\cdot$' *linkskürzbar* ist).

(2) Der zu (1) duale Begriff lautet *Epimorphismus* in $\mathbf{C}$ (oder kurz $\mathbf{C}$-*Epi*). ($\rightsquigarrow$ *Rechtskürzbarkeit*)

Beispiel 2.3.12 In den Kategorien **Set**, **Grp**, **Ab**, **R-Mod**, **POS** und **Top** entsprechen die Monomorphismen (bzw. Epimorphismen) denjenigen Morphismen, die als Abbildungen auf den unterliegenden Mengen injektiv (bzw. surjektiv) sind. In **Ring** gilt nur eine dieser beiden Entsprechungen. (Warum? $\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe.)

Satz 2.3.13 Bei den folgenden Aussagen steht die duale Aussage jeweils in den Klammern:

(1) $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ $\mathbf{C}$-Mono (bzw. -Epi) $\quad \Longrightarrow \quad A \xrightarrow{gf} C$ $\mathbf{C}$-Mono (bzw. -Epi).

(2) $f, g \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ und $g \cdot f$ $\mathbf{C}$-Mono (bzw. -Epi) $\quad \Longrightarrow \quad f$ $\mathbf{C}$-Mono (bzw. g $\mathbf{C}$-Epi).

(3) Jeder $\mathbf{C}$-Schnitt (bzw. -Retraktion) ist ein $\mathbf{C}$-Mono (bzw. -Epi).

Beweis: Betrachte die folgende Situation:

$$\bullet \underset{k}{\overset{h}{\rightrightarrows}} \bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$$

zu (1): Aus $(gf)h = (gf)k$ folgt zunächst $fh = fk$, da g ein Mono ist und dann $h = k$, da f auch ein Mono ist.

zu (2): Aus $fh = fk$ folgt sicherlich $(gf)h = (gf)k$ und somit nach Voraussetzung $h = k$.

zu (3): Nach Voraussetzung gibt es ein $f' \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ mit $f' \cdot f = \mathrm{id}$. Gilt nun $fh = fk$, so auch $f'fh = f'fk$, d.h. $\mathrm{id} \cdot h = \mathrm{id} \cdot k$, also $h = k$.

✓

Satz 2.3.14 In jeder Kategorie $\mathbf{C}$ sind äquivalent:

(1) f ist ein $\mathbf{C}$-Isomorphismus;

(2) f ist $\mathbf{C}$-Mono und -Retraktion (bzw. $\mathbf{C}$-Epi und -Schnitt).

Beweis: Die Äquivalenz von (1) und der geklammerten Aussage erhält man durch dualisieren.
(1) $\Rightarrow$ (2): Klar mit 2.3.13, (3).
(2) $\Rightarrow$ (1): Sei f ein $\mathbf{C}$-Mono und $g \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ mit $f \cdot g = \mathrm{id}$. Dann folgt

$$f(gf) = (fg)f = \mathrm{id}\, f = f\, \mathrm{id} \quad \Longrightarrow \quad gf = \mathrm{id},$$

d.h. f ist ein $\mathbf{C}$-Isomorphismus. ✓

Definition 2.3.15 (1) Ein $\mathbf{C}$-Epi e heißt *extremal*, falls stets gilt

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "f"'] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "m\ \text{Mono}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{kommutiert} \quad \Longrightarrow \quad m \text{ ist } \mathbf{C}\text{-Isomorphismus.}$$

(2) Dual dazu heißt ein $\mathbf{C}$-Mono m heißt *extremal*, falls stets gilt

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "\text{Epi}\ e"'] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \quad \text{kommutiert} \quad \Longrightarrow \quad e \text{ ist } \mathbf{C}\text{-Isomorphismus.}$$

(3) Ein *(extremales) Unterobjekt* eines Objektes B ist ein Paar (A, f), wobei $f : A \longrightarrow B$ ein (extremaler) Monomorphismus ist.

(4) Dual zu (3) definiert man *(extremale) Quotienten* (f, B) eines Objektes A.

(5) Für Unterobjekte eines Objektes B definiert man:

$$(A, f) \leq (C, g) \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, dashed, "\exists\, h"'] & \\ & B \\ C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(6) Analog definiert man '$\leq$' für Quotienten. ($\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe.)

(7) $(A, f) \approx (C, g) \quad :\Longleftrightarrow \quad (A, f) \leq (C, g) \wedge (C, g) \leq (A, f)$.

Satz 2.3.16 Für Unterobjekte $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} B$ eines Objektes $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ gilt:

$$(A, f) \approx (C, g) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists!_{\text{Isom.}}\ h : A \longrightarrow C :\ g \cdot h = f.$$

Beweis: Wegen $(A, f) \leq (C, g)$ und $(C, g) \leq (A, f)$ erhält man folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, dashed, bend right, "h"'] & \\
& B \\
C \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, dashed, bend right, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

und damit

$$f \cdot (k \cdot h) = g \cdot h = f = f \cdot \mathrm{id} \qquad \text{sowie} \qquad g \cdot (h \cdot k) = f \cdot k = g = g \cdot \mathrm{id}\,.$$

Da f und g **C**-Monos sind, folgt $k \cdot h = \mathrm{id}$ und $h \cdot k = \mathrm{id}$, d.h. h ist ein Isomorphismus. Die Eindeutigkeit von h folgt ebenfalls aus der Linkskürzbarkeit von g. ✓

Bemerkung 2.3.17 (& Definition) (i) Für jedes Objekt $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ gibt nach obigem Satz '$\approx$' eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der (extremalen) Unterobjekte von B. Mit Hilfe des Auswahlaxioms erhält man ein Repräsentantensystem für '$\approx$', das dann eine Teilklasse der Klasse aller (extremalen) Unterobjekte von B ist.

(ii) Eine Kategorie **C** heißt *(extremally) well-powered*, falls es für jedes Objekt ein Repräsentantensystem zu '$\approx$' gibt, das eine Menge ist. Dual dazu nennt man **C** *(extremally) co-well-powered*. D.h. eine Kategorie ist genau dann (extremally) well-powered, wenn jedes Objekt bis auf Isomorphie nur eine Menge von (extremalen) Unterobjekten hat.

Beispiele 2.3.18 (1) **Set**, **Grp** und **Top** sind well-powered und co-well-powered.

(2) Die Klasse aller Ordinalzahlen (als Kategorie) ist well-powered aber nicht co-well-powered.

(3) In **Set**, **Grp** und **R-Mod** sind alle Epimorphismen und Monomorphismen extremal. In **Top** sind die extremalen Epimorphismen (Monomorphismen) genau die topologischen Quotienten (Einbettungen).

Satz 2.3.19 Für $f \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ sind äquivalent:

(1) f ist ein Isomorphismus;

(2) f ist ein extremaler Epi. und ein Monomorphismus;

(3) f ist ein extremaler Mono. und ein Epimorphismus.

Beweis: "(1) $\Rightarrow$ (2)": Sei f ein Isomorphismus, dann ist f auch ein Epi- und Monomorphismus nach 2.3.13. Es bleibt zu zeigen, dass ein f extremaler Epimorphismus ist. Gilt $f = m \cdot g$ mit geeigneten Morphismen m, g und m ein Monomorphismus, so ist m nach 2.3.6 auch eine Retraktion , denn f ist eine Retraktion nach Voraussetzung. Also ist m ein Isomorphismus nach 2.3.14.

"(2) $\Rightarrow$ (1)": Sei f extremaler Epimorphismus und Monomorphismus. Dann ist f wegen der Faktorisierung $f = f \cdot \mathrm{id}$ auch ein Isomorphismus.

"(1) $\Leftrightarrow$ (3)": Klar, da (1) selbstdual ist und (3) die zu (2) duale Aussage. ✓

Nach dem Beweis zu 2.3.19 gelten offenbar die folgenden Implikationen:

$$\text{Retraktion (Schnitt)} \quad \Longrightarrow \quad \text{extremaler Epi. (Mono.)} \quad \Longrightarrow \quad \text{Epi. (Mono.)}$$

wobei die Umkehrungen im allgemeinen nicht gelten. Daher ist "extremaler Epi." eine echte Abschwächung des Begriffs "Retraktion". Die Charakterisierung 2.3.19 findet daher häufiger Anwendung als der ähnlich lautende Satz 2.3.14. Die Frage, ob in einer bestimmten Kategorie alle Morphismen, die zugleich Mono- und Epimorphismus sind, auch Isomorphismen sind, hängt strukturell mit der Frage nach der Unterscheidbarkeit von extremalen und "normalen" Epimorphismen zusammen:

Satz 2.3.20 In einer Kategorie $\mathbf{C}$ sind äquivalent:

(1) f Epi- & Monomorphismus $\Longrightarrow$ f Isomorphismus;

(2) f Epimorphismus $\Longrightarrow$ f extremaler Epimorphismus;

(3) f Monomorphismus $\Longrightarrow$ f extremaler Monomorphismus.

Beweis: "(1) $\Rightarrow$ (2)": Sei f ein Epimorphismus und $f = m \cdot g$ eine Faktorisierung mit einem Monomorphismus m. Nach 2.3.13 ist m auch ein Epimorphismus, da f einer ist. Also ist nach Voraussetzung m ein Isomorphismus.

"(2) $\Rightarrow$ (1)": Klar nach 2.3.19.

"(1) $\Leftrightarrow$ (3)": Klar, da (1) selbstdual ist und (3) die zu (2) duale Aussage. ✓

Definition 2.3.21 (1) $I \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ heißt *initiales* $\mathbf{C}$-*Objekt*, falls für alle $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ die Menge $\mathbf{C}(I, A)$ einelementig ist (d.h. $\exists! I \longrightarrow A$).

(2) Dual dazu ist $T \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ ein *terminales* $\mathbf{C}$-*Objekt*, falls für alle $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ die Menge $\mathbf{C}(A, T)$ einelementig ist (d.h. $\exists! A \longrightarrow T$).

(3) $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ heißt *Nullobjekt* in $\mathbf{C}$, falls X initial und terminal in $\mathbf{C}$ ist.

Satz 2.3.22 Je zwei initiale (bzw. terminale) $\mathbf{C}$-Objekte X, Y sind $\mathbf{C}$-isomorph.

Beweis: Da X initial ist, gibt es genau ein $f : X \longrightarrow Y$ und genau ein $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$. Ebenso gibt es genau ein $g : Y \longrightarrow X$ und genau ein $\mathrm{id}_Y : Y \longrightarrow Y$. Damit folgt $g \cdot f = \mathrm{id}_X$ und $f \cdot g = \mathrm{id}_Y$. ✓

Beispiele 2.3.23 (1) Das Objekt mit unterliegender Menge $1 = \{\emptyset\}$ ist terminal in **Set**, **Grp**, **Ab**, **R-Mod**, **Rng** und **Top**; $\emptyset$ ist initial in **Set** und **Top**.

(2) $\mathbb{Z}$ ist initial in **Rng**. In **Grp**, **Ab** und **R-Mod** gibt es auch initiale Objekte. Aber: **Field** hat weder initiale noch terminale Objekte. (Warum? $\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe.)

Kapitel 3

Funktoren und natürliche Transformationen

Dem “kategoriellen Imperativ” folgend wollen wir in diesem Kapitel geeignete Morphismen zwischen Kategorien, Funktoren, einführen.

3.1 Funktoren

Definition 3.1.1 Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Kategorien. Ein *Funktor* $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ von $\mathbf{A}$ nach $\mathbf{B}$ ist ein Paar von Abbildungen $F : \mathrm{ob}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathrm{ob}(\mathbf{B})$, $F : \mathrm{mor}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathrm{mor}(\mathbf{B})$, so dass gilt:

(1) $A \xrightarrow{f} A' \in \mathrm{mor}(\mathbf{A}) \quad \Longrightarrow \quad FA \xrightarrow{Ff} FA' \in \mathrm{mor}(\mathbf{B})$.

(2) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$, für alle $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$.

(3) Ist $g \cdot f$ in $\mathbf{A}$ definiert, so gilt $F(g \cdot f) = Fg \cdot Ff$.

Beispiele 3.1.2 (1) Zu jeder Kategorie $\mathbf{A}$ existiert ein *Identitätsfunktor* $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$, mit $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}(A) = A$, für alle $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$, und $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}(f) = f$, für alle $f \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})$.

(2) Zu jedem Objekt $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ einer Kategorie $\mathbf{A}$ und jeder Kategorie $\mathbf{B}$ existiert ein Funktor $c_A : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ mit $c_A(B) = A$, für alle $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$, und $c_A(f) = \mathrm{id}_A$, für alle $f \in \mathrm{mor}(\mathbf{B})$. Dies ist der *konstante Funktor* mit Wert A.

(3) Zu $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ existiert ein so genannter hom-Funktor: $\mathbf{C}(\_, A) : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ mit

- $\mathbf{C}(\_, A)(D) = \mathbf{C}(D, A)$ und
- $\mathbf{C}(\_, A)(D \xrightarrow{f} D') = \mathbf{C}(f, A) : \mathbf{C}(D', A) \longrightarrow \mathbf{C}(D, A)$ mit $\mathbf{C}(f, A)(g) = g \cdot f$.

Dies ist ein *kontravarianter* Funktor:

Definition 3.1.3 Einen Funktor $F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{D}$ nennt man einen *kontravarianten Funktor* $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, dieser erfüllt dann $F(f \cdot g) = Fg \cdot Ff$.

(4) Zu $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ existiert auch ein hom-Funktor: $\mathbf{C}(A, \_) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ mit

- $\mathbf{C}(A, \_)(D) = \mathbf{C}(A, D)$ und

- $\mathbf{C}(A,\_)(D \xrightarrow{f} D') = \mathbf{C}(A,f) : \mathbf{C}(A,D) \longrightarrow \mathbf{C}(A,D')$ mit $\mathbf{C}(A,f)(g) = f \cdot g$.

Bemerkung 3.1.4 Oft bezeichnen wir hom-Funktoren wie folgt:

$$\mathbf{C}(A,\_) = \hom_{\mathbf{C}}(A,\_) = \hom(A,\_) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

bzw.

$$\mathbf{C}(\_,A) = \hom_{\mathbf{C}}(\_,A) = \hom(\_,A) : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

wobei die letztere Bezeichnung nur verwendet wird, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht.

(5) Die Kategorie **Met** der metrischen Räume (X,d) und Kontraktionen dazwischen liefert ein Beispiel für einen so genannten *Vergissfunktor* $U : \mathbf{Met} \longrightarrow \mathbf{Set}$, definiert durch

$$U : (X,d) \xrightarrow{f} (Y,d') \longmapsto X \xrightarrow{f} Y.$$

Dieser "vergisst" die metrische Struktur.

(6) Für Unterkategorien $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ gibt es einen offensichtlichen Inklusionsfunktor $\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$.

Achtung! Für einen Gruppenhomomorphismus $G \xrightarrow{f} G'$ ist bekanntlich dessen Bild $f[G]$ eine Untergruppe von G'. Dies gilt *nicht* für Kategorien: Betrachte z.B.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{B} \arrow[rr, "F"] & & \mathbf{A} & \\
A \arrow[r, "f"] & B & \longmapsto & FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[dr, "Fg \cdot Ff"'] & FB = FC \arrow[d, "Fg"] \\
C \arrow[r, "g"] & D & & & FD
\end{tikzcd}$$

Hier ist $F(\mathbf{B})$ keine Unterkategorie von $\mathbf{A}$.

(7) Zu jeder Menge A gibt es einen Funktor $A \times \_ : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ mit

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "f"'] & \longmapsto & A \times B \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times f"] \\
B' & & A \times B'
\end{tikzcd}$$

wobei $\mathrm{id}_A \times f(a,b) = (a, f(a))$. Oft wird für $\mathrm{id}_A \times f$ auch einfach nur $A \times f$ geschrieben.

Definition 3.1.5 Sei $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor.

(1) F heißt *voll*, falls für alle $A, A' \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ die Restriktion

$$F|_{AA'} : \mathbf{A}(A,A') \longrightarrow \mathbf{B}(FA,FA'),\ f \longmapsto Ff$$

surjektiv ist, d.h. falls es zu $FA \xrightarrow{g} FA'$ stets $f \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})$ gibt mit $F(f) = g$.

(2) F heißt *treu*, falls für alle $A, A' \in \text{ob}(\mathbf{A})$ $F|_{AA'}$ injektiv ist, d.h. falls aus $Ff = Fg$ stets $f = g$ folgt.

(3) F heißt *Einbettung*, falls F treu ist und injektiv auf Objekten (d.h. aus $F(A) = F(B)$ folgt stets $A = B$).

Beispiele 3.1.6 Wir betrachten noch einmal einige der obigen Beispiele von Funktoren:

(1) Für jede Kategorie $\mathbf{A}$ ist $\text{id}_{\mathbf{A}}$ voll, treu und eine Einbettung.

(2) Der Vergissfunktor $U : \mathbf{Met} \longrightarrow \mathbf{Set}$ ist treu.

(3) Die Inklusion $\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ einer Unterkategorie eine Einbettung. Sie ist genau dann voll, wenn $\mathbf{B}$ eine volle Unterkategorie von $\mathbf{A}$ ist.

3.2 Operationen mit Funktoren

Definition 3.2.1 Sei $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor.

(1) Der zu F *duale Funktor* $F^{\text{op}} : \mathbf{A}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{B}^{\text{op}}$ ist definiert durch $F^{\text{op}}(A) = F(A)$ für Objekte und $F^{\text{op}}(f) = F(f)$ für Morphismen.

(2) Ist $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ ein Funktor, so ist $G \cdot F = GF : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ definiert durch $GF(A) = G(F(A))$, $GF(f) = G(F(f))$ ein Funktor, die *Komposition* von F und G.

Bemerkung 3.2.2 Die Komposition von Funktoren ist assoziativ und $\text{id}_{\mathbf{A}}$ ist diesbezüglich eine Identität auf $\mathbf{A}$. Jedoch ist im allgemeinen für ein Paar von Kategorien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ die Klasse der Funktoren $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *keine* Menge! Daher bilden Kategorien als Objekte und Funktoren als Morphismen zusammen *keine* Kategorie in unserem Sinne. Man kann aber zeigen, dass für kleine Kategorien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ die Klasse der Funktoren $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ eine Menge ist. Daher bildet die Klasse der kleinen Kategorien als Objekte, zusammen mit der Klasse der Funktoren dazwischen als Morphismen, eine Kategorie. Diese *Kategorie der kleinen Kategorien* bezeichnen wir mit **Cat**.

Definition 3.2.3 Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ Kategorien. Ein Funktor $\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{B}$ heißt *Isomorphismus*, falls ein (eindeutig bestimmter) Funktor $\mathbf{B} \xrightarrow{G} \mathbf{A}$ existiert mit $FG = \text{id}_{\mathbf{B}}$, $GF = \text{id}_{\mathbf{A}}$. $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ heißen *isomorph*, falls es einen Isomorphismus $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ gibt. Dann schreiben wir $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

Beispiele 3.2.4

(1) Die Kategorie der metrischen Räume und stetigen Abbildungen $\mathbf{Met}_c$ ist *nicht* isomorph zur Kategorie $\mathbf{Top}_m$ der metrisierbaren, topologischen Räume: Bekanntlich erzeugen die euklidische Metrik d_E und die Maximums-Metrik d_M dieselbe Topologie auf dem $\mathbb{R}^2$. Daher lassen sich die in $\mathbf{Met}_c$ verschiedenen Räume $(\mathbb{R}^2, d_E)$ und $(\mathbb{R}^2, d_M)$ in $\mathbf{Top}_m$ nicht unterscheiden. Einem gegebenen, metrisierbaren Raum lässt sich daher nicht eindeutig eine induzierende Metrik zuordnen.

(2) Für einen kommutativen Ring R gilt **R-Mod** $\cong$ **Mod-R**.

Satz 3.2.5 Seien $\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \xrightarrow{G} \mathbf{C}$ Funktoren. Dann gilt:

(1) F, G voll (bzw. treu, Einbettung) $\Longrightarrow$ GF voll (bzw. treu, Einbettung)

(2) GF voll $\Longrightarrow$ G voll auf dem Bild von F

(3) GF treu (bzw. Einbettung) $\Longrightarrow$ F treu (bzw. Einbettung).

Beweis: Wir zeigen exemplarisch einen Teil von (1) und überlassen den Rest dem Leser als Übungsaufgabe.

Seien G und F voll, sowie $GFA \xrightarrow{g} GFA'$ ein $\mathbf{C}$-Morphismus. Da G voll ist, gibt es ein $FA \xrightarrow{h} FA'$ mit $G(h) = g$. Da F voll ist, gibt es ein $A \xrightarrow{f} A'$ mit $F(f) = h$, also mit $GF(f) = G(h) = g$. ✓

Satz 3.2.6 Jeder Funktor *bewahrt* Retraktionen, Schnitte, Isomorphismen und kommutative Dreiecke (d.h. f Retraktion (etc.) $\Longrightarrow F(f)$ Retraktion (etc.)).

Beweis: Sei $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor und r eine $\mathbf{A}$-Retraktion, d.h. es gebe ein s mit $r \cdot s = \mathrm{id}$. Dann folgt

$$F(r) \cdot F(s) = F(r \cdot s) = F(\mathrm{id}) = \mathrm{id},$$

also ist auch $F(r)$ eine Retraktion.

Nun bewahrt auch $F^{\mathrm{op}} : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{B}^{\mathrm{op}}$ Retraktionen, d.h. wegen der Dualität der Begriffe bewahrt F damit Schnitte.

Da F Schnitte und Retraktionen bewahrt, bewahrt F auch Isomorphismen.

Die Aussage über kommutative Dreiecke ergibt sich unmittelbar aus der Definition eines Funktors, da diese die Komposition von Morphismen bewahren. ✓

Satz 3.2.7 Jeder Funktor, der voll und treu ist, *reflektiert* Retraktionen, Schnitte und Isomorphismen (d.h. $F(f)$ Retraktion (etc.) $\Longrightarrow f$ Retraktion (etc.)).

Beweis: Sei $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor und $FA \xrightarrow{F(f)} FA'$ ein Schnitt, d.h. es gebe einen $\mathbf{B}$-Morphismus $FA' \xrightarrow{h} FA$ mit $h \cdot F(f) = \mathrm{id}_{FA}$. Da F voll ist, gibt es einen $\mathbf{A}$-Morphismus $A' \xrightarrow{g} A$ mit $F(g) = h$, d.h. mit

$$F(g \cdot f) = F(g) \cdot F(f) = h \cdot F(f) = \mathrm{id}_{FA} = F(\mathrm{id}_A).$$

Da F treu ist, folgt $g \cdot f = \mathrm{id}_A$, d.h. f ist ein Schnitt.

Die Aussage über Retraktionen und Isomorphismen folgt wieder mit Dualität.

✓

Satz 3.2.8 Jeder treue Funktor reflektiert Epimorphismen, Monomorphismen und kommutative Diagramme.

Beweis: Sei $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor und $F(f)$ ein Monomorphismus. Weiter seien g, h $\mathbf{A}$-Morphismen mit $f \cdot g = f \cdot h$. Dann gilt

$$F(f) \cdot F(g) = F(f \cdot g) = F(f \cdot h) = F(f) \cdot F(h),$$

also $F(g) = F(h)$, da F ein Monomorphismus ist. Weil F auch treu ist, folgt $g = h$.

Die Aussage über Epimorphismen ergibt sich durch dualisieren.

Jedes kommutative Diagramm ist aus eben solchen Dreiecken zusammengesetzt. Für ein kommutatives Dreieck

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[dr, "Fh"'] & FB \arrow[d, "Fg"] \\ & FC \end{tikzcd}$$

gilt $F(g \cdot f) = F(g) \cdot F(f) = Fh$, d.h. $g \cdot f = h$, weil F treu ist. Daher reflektiert F kommutative Diagramme. ✓

Definition 3.2.9 Ein Funktor $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ heißt *Iso-dicht*, falls es zu jedem $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$ ein $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ gibt mit $F(A) \cong B$.

Satz 3.2.10 Jeder volle, treue und Iso-dichte Funktor bewahrt und reflektiert: Mono-, Epi- und Isomorphismen, sowie Schnitte, Retraktionen und kommutative Diagramme.

Beweis: Sei $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor. Es genügt zu zeigen, dass F Monomorphismen bewahrt. Die restlichen Aussagen ergeben sich durch dualisieren bzw. aus den obigen Sätzen.

Sei $A \xrightarrow{f} A'$ ein Monomorphismus, sowie $h, g \in \mathrm{mor}(\mathbf{B})$ mit $Ff \cdot g = Ff \cdot h$:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & FA \arrow[r, "Ff"] & FA' \\ FA'' \arrow[u, "s", "\cong"'] \arrow[ur, bend left, "gs"] \arrow[ur, bend right, "hs"'] & & \end{tikzcd}$$

Da F Iso-dicht ist, gibt es ein $A'' \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ und einen Isomorphismus $s : FA'' \longrightarrow B$. Weil F voll ist, gibt es zu $g \cdot s$ bzw. $h \cdot s$ Morphismen u, v mit

$$F(u) = g \cdot s, \quad F(v) = h \cdot s.$$

Aus $Ff \cdot g = Ff \cdot h$ folgt

$$\begin{aligned} F(f \cdot u) = Ff \cdot Fu &= Ff \cdot g \cdot s \\ &= Ff \cdot h \cdot s \\ &= Ff \cdot Fv = F(f \cdot v), \end{aligned}$$

also $f \cdot u = f \cdot v$, da F treu ist. Nun ist f ein Monomorphismus, also gilt $u = v$ und damit

$$g \cdot s = F(u) = F(v) = h \cdot s,$$

d.h. $g = h$, denn s ist ein Isomorphismus. ✓

3.3 Natürliche Transformationen

In diesem Abschnitt werden wir "vernünftige" Morphismen α zwischen parallelen Funktoren

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & \mathbf{B} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

definieren und untersuchen:

Definition 3.3.1 Seien $F, G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $\alpha : F \longrightarrow G$ ist eine Familie $(FA \xrightarrow{\alpha_A} GA)_{A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})}$ von $\mathbf{B}$-Morphismen, so dass für alle $\mathbf{A}$-Morphismen $f : A \longrightarrow A'$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FA' \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & GA' \end{tikzcd}$$

kommutiert. Man schreibt dafür manchmal kurz $\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$.

Beispiele 3.3.2 (1) Zu jedem Funktor $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ existiert die identische natürliche Transformation $\mathrm{id}_F : F \longrightarrow F$, gegeben durch $(\mathrm{id}_F)_A = \mathrm{id}_{FA}$.

(2) Sei $H : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ der Funktor, der jeder Gruppe G die abelsche Gruppe $A_G = G/[G, G]$ zuordnet, d.h. den Kommutator ausfaktorisiert[1]. Es bezeichne $E : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ die Einbettung, sowie für jedes $G \in \mathrm{ob}(\mathbf{Grp})$ $p_G : G \longrightarrow A_G$ die kanonische Projektion. Dann ist $p : \mathrm{id}_{\mathbf{Grp}} \longrightarrow EH$ eine natürliche Transformation.

(3) Sei B eine Menge und $B\times\_ : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$, $\_ \times B : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ Funktoren mit

$$B \times\_\,(A \xrightarrow{f} A') = B \times A \overset{\mathrm{id}_B \times f}{\longrightarrow} B \times A', \quad (b, a) \longmapsto (b, f(a)),$$

sowie

$$\_ \times B(A \xrightarrow{f} A') = A \times B \overset{f \times \mathrm{id}_B}{\longrightarrow} A' \times B, \quad (a, b) \longmapsto (f(a), b).$$

Dann ist $B\times\_ \xrightarrow{\tau} \_ \times B$, definiert durch

$$\tau_A : B \times A \longrightarrow A \times B, \quad (b, a) \longmapsto (a, b),$$

eine natürliche Transformation.

(3′) Sind B, B' Mengen und $f : B \longrightarrow B'$ eine Funktion, so ist eine natürliche Transformation $f^* : B\times\_ \longrightarrow B'\times\_$ gegeben durch

$$f^*_A : B \times A \longrightarrow B' \times A, \quad (b, a) \longmapsto (f(b), a).$$

Diese wird manchmal mit $f\times\_$ bezeichnet, wobei dann $(f\times\_)_A = f \times A = f \times \mathrm{id}_A$.

(4) Sei $D : \mathbf{Vek}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Vek}$ der *Dualraumfunktor*, d.h.

$$D : \quad \begin{tikzcd} V \arrow[d, "h"'] \\ W \end{tikzcd} \quad \longmapsto \quad \begin{tikzcd} V^* \\ W^* \arrow[u, "(\varphi \mapsto \varphi \cdot h)"'] \end{tikzcd}$$

[1] Siehe auch 1.1.3 (4). Einem Morphismus $f : G' \longrightarrow G$ ordne H dabei die kanonische Fortsetzung von $G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{p_G} A_G$ zu.

wobei $V^* := \{V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \mid \varphi \text{ linear }\}$ und W^* entsprechend. Weiter sei

$$\overline{D} : \mathbf{Vek} = (\mathbf{Vek}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{D^{\mathrm{op}}} \mathbf{Vek}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{D} \mathbf{Vek}$$

der *Doppeldualraumfunktor*. Dann ist $\alpha : \mathrm{id}_{\mathbf{Vek}} \longrightarrow \overline{D}$, definiert durch

$$\alpha_V : V \longrightarrow \overline{D}(V) = V^{**}, \quad x \longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(x)),$$

eine natürliche Transformation. Hierbei ist sogar jedes α_V ein Isomorphismus.

Definition 3.3.3 (1) Seien $G, G' : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ Funktoren, $G \xrightarrow{\alpha} G'$ eine natürliche Transformation. Dann ist

$$\alpha^{\mathrm{op}} : (G')^{\mathrm{op}} \longrightarrow G^{\mathrm{op}}, \quad \alpha^{\mathrm{op}}_A := \alpha_A,$$

die zu α *duale* natürliche Transformation.

(2) Sei $\alpha : G \longrightarrow G'$ wie in (1) und $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$ ein Funktor. Dann ist die natürliche Transformation $\alpha F : GF \longrightarrow G'F$ definiert durch

$$(\alpha F)_A := \alpha_{FA}.$$

(3) Sei $\alpha : G \longrightarrow G'$ wie in (1) und $H : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{D}$ ein Funktor. Dann ist die natürliche Transformation $H\alpha : HG \longrightarrow HG'$ definiert durch

$$(H\alpha)_A := H\alpha_A.$$

Der zweite und dritte Teil der obigen Definition lassen sich wie folgt veranschaulichen: Jede Situation

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "F"] & \mathbf{A} \arrow[r, bend left, "G"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G'"'{name=L}] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathbf{B} \arrow[r, "H"] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

induziert natürliche Transformationen

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, bend left, "GF"] \arrow[r, bend right, "G'F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha F"] & \mathbf{B} \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend left, "HG"] \arrow[r, bend right, "HG'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H\alpha"] & \mathbf{D} \end{tikzcd}.$$

Satz 3.3.4 Seien $F, G, H : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ Funktoren, $F \xrightarrow{\alpha} G$ und $G \xrightarrow{\beta} H$ natürliche Transformationen. Dann ist $\beta \cdot \alpha$, definiert durch

$$(\beta \cdot \alpha)_A := \beta_A \cdot \alpha_A,$$

eine natürliche Transformation $F \longrightarrow H$, d.h. natürliche Transformationen lassen sich wie folgt komponieren:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G"description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathbf{B} \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\alpha"] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus dem folgenden, kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[rr, bend left, "(\beta\alpha)_A"] & GA \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "Gf"] & HA \arrow[d, "Hf"] \\ A' & FA' \arrow[r, "\alpha_{A'}"] \arrow[rr, bend right, "(\beta\alpha)_{A'}"'] & GA' \arrow[r, "\beta_{A'}"] & HA' \end{tikzcd}$$

✓

Bemerkung 3.3.5 Die Komposition von natürlichen Transformationen ist assoziativ, und für jeden Funktor F ist id_F neutral bzgl. dieser Komposition.

Satz 3.3.6 Sei $\alpha : F \longrightarrow G$ eine natürliche Transformation. Äquivalent sind:

(1) Für jedes Objekt A ist α_A ein Isomorphismus.

(2) Es gibt eine natürliche Transformation $\beta : G \longrightarrow F$ mit $\beta \cdot \alpha = \mathrm{id}_F$ und $\alpha \cdot \beta = \mathrm{id}_G$.

Beweis: Seien $F, G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ Funktoren und $\alpha : F \longrightarrow G$ natürlich.

"(1) $\Rightarrow$ (2)": Setze $\beta_A := \alpha_A^{-1}$ für jedes $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$. Dann kommutiert in

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & GA \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "Gf"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{GA}"] & FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ A' & GA' \arrow[r, "\beta_{A'}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{GA'}"'] & FA' \arrow[r, "\alpha_{A'}"] & GA' \end{tikzcd}$$

der äußere Rahmen und das rechte Quadrat, d.h. es folgt

$$\alpha_{A'} \cdot Ff \cdot \beta_A = \alpha_{A'} \cdot \beta_{A'} \cdot Gf.$$

Da $\alpha_{A'}$ nach Voraussetzung ein Isomorphismus ist, folgt

$$Ff \cdot \beta_A = \beta_{A'} \cdot Gf,$$

was zu zeigen war.

"(2) $\Rightarrow$ (1)": Sei $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$. Aus $\beta \cdot \alpha = \mathrm{id}_F$ folgt

$$\beta_A \cdot \alpha_A = (\beta \cdot \alpha)_A = \mathrm{id}_{FA}\,.$$

Analog folgt $\alpha_A \cdot \beta_A = \mathrm{id}_{GA}$. ✓

Definition 3.3.7 Natürliche Transformationen, welche den Bedingungen des obigen Satzes genügen, heißen *natürliche Isomorphismen*.

Beispiel 3.3.8 Im obigen Beispiel (4) ist $\alpha : \mathrm{id}_{\mathbf{Vek}} \longrightarrow \overline{D}$ ein natürlicher Isomorphismus auf der Kategorie der endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Definition 3.3.9 $F, G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ heißen *natürlich isomorph*, falls es einen natürlichen Isomorphismus $\alpha : F \longrightarrow G$ gibt.

Bemerkung 3.3.10 "Natürlich isomorph sein" ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der Funktoren $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$.

Satz 3.3.11 Seien $F, G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ Funktoren und $\alpha : F \longrightarrow G$ ein natürlicher Isomorphismus. Dann ist F genau dann voll (bzw. treu), wenn G voll (bzw. treu) ist.

Beweis: ad "voll": Aus Gründen der Symmetrie genügt es, die Implikation "$\Rightarrow$" zu zeigen. Sei also F voll und $GA \xrightarrow{h} GA'$ ein $\mathbf{B}$-Morphismus. Da F voll ist, existiert ein $\mathbf{A}$-Morphismus $A \xrightarrow{f} A'$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, dashed, "Ff"'] & GA \arrow[d, "h"] \\
FA' & GA' \arrow[l, "\alpha_{A'}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Da α natürlich ist, folgt

$$Gf \cdot \alpha_A = \alpha_{A'} \cdot Ff = \alpha_{A'} \cdot \alpha_{A'}^{-1} \cdot h \cdot \alpha_A = h \cdot \alpha_A,$$

d.h. $Gf = h$.

ad "treu": Übungsaufgabe (geht analog). ✓

3.4 Äquivalenz von Kategorien

Der bereits in Abschnitt 3.2 eingeführte Begriff der Isomorphie von Kategorien erweist sich in der Praxis als zu stark. Es stellt sich heraus, dass der etwas schwächere Begriff der *Äquivalenz* von Kategorien ausreichend stark sein wird, d.h. äquivalente Kategorien haben dieselben kategoriellen Eigenschaften, sind in diesem Sinne also ununterscheidbar.

Satz 3.4.1 Sei $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor. Äquivalent sind:

(1) F ist voll, treu und Iso-dicht.

(2) Es existieren ein Funktor $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ und natürliche Isomorphismen $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \xrightarrow{\eta} GF$, $FG \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{id}_{\mathbf{B}}$.

Beweis: "(2) $\Rightarrow$ (1)": Da $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ treu ist und η ein natürlicher Isomorphismus, ist auch GF treu nach Satz 3.3.11. Damit ist F treu nach 3.2.5. Ebenso ist $\mathrm{id}_{\mathbf{B}}$ voll und ε ein natürlicher Isomorphismus, also FG voll nach 3.3.11, und damit auch F nach 3.2.5. Sei schließlich $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$, dann ist

$$F(GB) \xrightarrow{\varepsilon_B} B$$

ein Isomorphismus in $\mathbf{B}$ und $GB \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$, d.h. F ist auch Iso-dicht.

"(1) $\Rightarrow$ (2)": Zu jedem $\mathbf{B}$-Objekt B existiert ein $\mathbf{A}$-Objekt GB und ein Isomorphismus

$$FGB \xrightarrow{\varepsilon_B} B,$$

denn F ist Iso-dicht. Dies gibt eine Operation $G : \mathrm{ob}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathrm{ob}(\mathbf{A})$, die zu einem Funktor erweitert werden kann:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\forall f"'] & GB \arrow[d, "\exists!"', "Gf"] & F(GB) \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, dashed, "F(Gf)"] & B \arrow[d, "f"] \\ B' & GB' & F(GB') & B' \arrow[l, "\varepsilon_{B'}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Da F voll und treu ist, existiert für jeden $\mathbf{B}$-Morphismus f ein eindeutig bestimmter $\mathbf{A}$-Morphismus Gf, der das obige Diagramm kommutativ macht. Dies gibt einen Funktor $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$:

- $G(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{GB}$ ist nach Konstruktion klar.
- Ferner gilt für $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$$\begin{aligned} F(Gg \cdot Gf) &= FGg \cdot FGf \\ &= \varepsilon_C^{-1} \cdot g \cdot \varepsilon_B \cdot \varepsilon_B^{-1} \cdot f \cdot \varepsilon_A \\ &= \varepsilon_C^{-1} \cdot (g \cdot f) \cdot \varepsilon_A = F(G(g \cdot f)), \end{aligned}$$

  d.h. $Gg \cdot Gf = G(g \cdot f)$, da F treu ist.

Nach Konstruktion ist dann $\varepsilon : FG \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{B}}$, mit ε_B wie oben, ein natürlicher Isomorphismus.

Schließlich ist noch ein natürlicher Isomorphismus $\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{A}} \longrightarrow GF$ zu definieren: Für jedes $\mathbf{A}$-Objekt A gibt es einen Isomorphismus

$$FA \xrightarrow{\varepsilon_{FA}^{-1}} FGFA.$$

Sei dann η_A der durch $F(\eta_A) = \varepsilon_{FA}^{-1}$ eindeutig bestimmte Morphismus $A \longrightarrow GFA$. Dann gilt für $A \xrightarrow{f} A'$

$$\begin{aligned} F(GFf \cdot \eta_A) &= FGFf \cdot F(\eta_A) \\ &= \varepsilon_{FA'}^{-1} \cdot Ff \cdot \varepsilon_{FA} \cdot \varepsilon_{FA}^{-1} \\ &= F(\eta_{A'}) \cdot Ff = F(\eta_{A'} \cdot f), \end{aligned}$$

d.h. $GFf \cdot \eta_A = \eta_{A'} \cdot f$. Somit ist $\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{A}} \longrightarrow GF$ natürlich. Überdies ist jedes η_A ein Isomorphismus, denn $F(\eta_A)$ ist nach Definition einer, und F reflektiert Isomorphismen nach 3.2.7. ✓

Definition 3.4.2 Erfüllt ein Funktor F die Bedingungen des obigen Satzes, so nennen wir F eine *Äquivalenz* oder einen *Äquivalenzfunktor*. Zwei Kategorien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ heißen *äquivalent*, falls es eine Äquivalenz $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ gibt.

Bemerkung 3.4.3 Wie wir schon in Satz 3.2.10 gesehen haben, bewahren und reflektieren Äquivalenzen Mono-, Epi- und Isomorphismen, sowie Schnitte, Retraktionen und kommutative Diagramme. Später werden wir feststellen, dass alle kategoriellen Konstruktionen unter Äquivalenzen invariant sind.

3.5 Funktorkategorien

Man betrachte das folgende Beispiel: Sei M ein Monoid. Dieser gibt bekanntlich eine Kategorie $\mathbf{M}$, wobei $\mathrm{ob}(\mathbf{M}) = \{\bullet\}$ und $\mathrm{mor}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}(\bullet, \bullet) = M$ mit Komposition wie in M. Ein Funktor $T : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{Set}$ lässt sich dann wie folgt beschreiben: $T(\bullet) = X$ ist eine Menge, und für jedes $m \in M$ ist $T(m) : X \longrightarrow X$ eine Abbildung, so dass

(1) $T(e) = \mathrm{id}_X$ für das neutrale Element $e \in M$,

(2) $T(m \cdot n) = T(m) \cdot T(n)$ für alle $m, n \in M$ (hierbei ist $m \cdot n$ die Multiplikation in M und $T(m) \cdot T(n)$ die Komposition von Funktionen in $\mathbf{Set}$).

Das heißt T entspricht einem Paar $(X, M \times X \xrightarrow{t} X)$, bestehend aus einer Menge X und einer Abbildung $t : M \times X \longrightarrow X$ (via $t(m, x) := T(m)(x)$) derart, dass gilt

(1) $t(e, x) = x$ für alle $x \in X$, e neutral in M,

(2) $t(m, t(n, x)) = t(m \cdot n, x)$ für alle $x \in X$, $m, n \in M$.

Dies beschreibt eine so genannte *Monoid-Operation*, d.h. die Aktion eines Monoids M auf einer Menge X. Ein *Morphismus von Monoid-Operationen* $f : (X, t) \longrightarrow (Y, s)$ ist eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ mit

$$s(m, f(x)) = f(t(m, x)), \text{ für alle } m \in M,\ x \in X.$$

Dies liefert eine Kategorie **M-Act**.

Was ist nun eine natürliche Transformation $\alpha : T \longrightarrow T'$ für $T, T' : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{Set}$? Da $\mathbf{M}$ nur ein Objekt $\bullet$ hat, gibt es nur ein

$$T(\bullet) \xrightarrow{\alpha_\bullet} T'(\bullet) =: X \xrightarrow{a} Y,$$

dieses erfüllt für alle $m \in M$

$$a \cdot T(m) = T'(m) \cdot a$$

wegen der Natürlichkeit. Das bedeutet für die entsprechenden Monoid-Operationen:

$$a(t(m, x)) = a(T(m)(x)) = T'(m)(a(x)) = s(m, a(x)),$$

also ist a ein Morphismus von Monoid-Operationen.

Insgesamt verhalten sich die Funktoren $T : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{Set}$, als Objekte gesehen, mit Morphismen $\alpha : T \longrightarrow T'$, wie die Kategorie **M-Act**. Es ist also nahe liegend, eine Kategorie zu definieren, deren Objekte Funktoren $\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{Set}$ sind und deren Morphismen die entsprechenden natürlichen Transformationen sind. Die allgemeine Definition solcher Funktorkategorien und deren Problematik wird in diesem Abschnitt behandelt.

Bemerkung 3.5.1 Für zwei Funktoren $F, G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ist im allgemeinen die Klasse aller natürlichen Transformationen $\alpha : F \longrightarrow G$ *keine* Menge. Man kann aber zeigen:

> Ist $\mathbf{A}$ klein, so ist für jedes $\mathbf{B}$ und für alle $F, G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ die Klasse
>
> $$\mathrm{Nat}(F, G) := \{\alpha \mid F \xrightarrow{\alpha} G \text{ ist nat. Transf.}\}$$
>
> eine Menge.

Den Beweis dazu werden wir hier nicht führen, sondern verweisen auf [8, 15.3]. Zur Beweisidee sei nur angemerkt, dass ein $\alpha \in \mathrm{Nat}(F, G)$ im wesentlichen eine Abbildung $\alpha : \mathrm{ob}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathrm{mor}(\mathbf{B})$ ist mit $\alpha(A) = \alpha_A \in \mathbf{B}(FA, GA)$. Mengentheoretisch ist damit

$$\alpha \subset \mathrm{ob}(\mathbf{A}) \times \bigcup_{A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})} \mathbf{B}(FA, GA) =: M.$$

Hierbei ist M eine Menge, falls $\mathbf{A}$ klein ist, d.h. falls $\mathrm{ob}(\mathbf{A})$ eine Menge ist. Somit ist α ein Element der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M, und schließlich $\mathrm{Nat}(F, G) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$.

Folgerung 3.5.2 Sei $\mathbf{A}$ eine kleine Kategorie und $\mathbf{B}$ eine beliebige. Dann können wir die folgende Kategorie bilden:

- Objekte: Funktoren $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$
- Morphismen von F nach G: $\mathrm{Nat}(F, G)$
- Komposition: „Vertikale Komposition“ von natürlichen Transformationen

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathbf{A} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, "G"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=D}] \arrow[from=U, to=M, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[from=M, to=D, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathbf{B} \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd}[column sep=large] \mathbf{A} \arrow[r, bend left=30, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=30, "H"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\beta\alpha"] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

Diese nennen wir die *Funktorkategorie* der Funktoren von $\mathbf{A}$ nach $\mathbf{B}$, in Zeichen $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ oder auch $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.

Beispiele 3.5.3 (1) Sei $\mathbf{1} \equiv \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop right, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$, dann gilt $\mathbf{B}^{\mathbf{1}} \cong \mathbf{B}$. Falls $\mathbf{B}$ klein ist, gilt auch $\mathbf{1}^{\mathbf{B}} \cong \mathbf{1}$.

(2) Sei

$$\mathbf{2} \equiv \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\mathrm{id}"] \arrow[r] & \circ \arrow[loop right, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd},$$

dann ist $\mathbf{B}^{\mathbf{2}}$ offenbar isomorph zur bereits definierten Pfeilkategorie $\mathbf{B}^{\mathbf{2}}$: Funktoren $F : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{B}$ sind $\mathbf{B}$-Morphismen, und eine natürliche Transformation $\alpha : F \longrightarrow G$ ist ein Paar $(\alpha_\bullet, \alpha_\circ)$ von Morphismen, so dass das entsprechende Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(\bullet) \arrow[d, "F(\to)"'] & & A \arrow[r, "\alpha_\bullet"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] & & G(\bullet) \arrow[d, "G(\to)"] \\ F(\circ) & = & B \arrow[r, "\alpha_\circ"'] & D & = & G(\circ) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(3) Ist M ein Monoid, so zeigt das Beispiel zu Beginn des Abschnitts, dass die Funktorkategorie $\mathbf{Set}^{\mathbf{M}}$ isomorph ist zur Kategorie **M-Act** der Monoid-Operationen.

Satz 3.5.4 Sei $\mathbf{A}$ klein und $F \xrightarrow{\eta} G$ ein Morphismus in $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. Ist η_A für alle $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ ein Epimorphismus (bzw. Mono-, Isomorphismus) in $\mathbf{B}$, so ist η ein Epimorphismus (bzw. Mono-, Isomorphismus) in $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.

Beweis: ad Epimorphismus: Sei dazu $\alpha \cdot \eta = \beta \cdot \eta$ in $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. Dann gilt für jedes $\mathbf{A}$-Objekt A:

$$\alpha_A \cdot \eta_A = (\alpha \cdot \eta)_A = (\beta \cdot \eta)_A = \beta_A \cdot \eta_A.$$

Daraus folgt $\alpha_A = \beta_A$ für alle $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$, d.h. $\alpha = \beta$.

ad Monomorphismus: Geht völlig analog.

ad Isomorphismus: Wurde bereits gezeigt bzw. folgt aus der Definition. ✓

Satz 3.5.5 Sei $\mathbf{A}$ eine kleine und $\mathbf{B}$ eine beliebige Kategorie. Dann gibt es einen Funktor

$$\mathrm{Ev} : \mathbf{B}^{\mathbf{A}} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B},$$

definiert durch

$$\mathrm{Ev}(F, A) := F(A) \quad \text{auf Objekten } (F, A)$$

und

$$\mathrm{Ev}(\eta, f) := \eta_{\mathrm{cod}(f)} \cdot Ff = Gf \cdot \eta_{\mathrm{dom}(f)} \quad \text{auf Morphismen } (F \xrightarrow{\eta} G, f).$$

Dieser wird auch *Evaluationsfunktor* genannt.

Beweis: Klar, denn für $F \xrightarrow{\eta} G \in \mathrm{mor}(\mathbf{B}^{\mathbf{A}})$ und $A \xrightarrow{f} A' \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})$ kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, "\mathrm{Ev}(\eta,f)"] & GA \arrow[d, "Gf"] \\
FA' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & GA'
\end{tikzcd}$$

Damit folgt

$$\mathrm{Ev}(\mathrm{id}_F, \mathrm{id}_A) = F(\mathrm{id}_A) \cdot \mathrm{id}_{FA} = \mathrm{id}_{FA} \cdot \mathrm{id}_{FA} = \mathrm{id}_{FA} = \mathrm{id}_{\mathrm{Ev}(F,A)}$$

sowie für $(F, A) \xrightarrow{(\eta,f)} (G, A') \xrightarrow{(\varepsilon,g)} (H, A'')$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ev}(\varepsilon \cdot \eta, g \cdot f) &= H(g \cdot f) \cdot (\varepsilon \cdot \eta)_A \\
&= Hg \cdot Hf \cdot \varepsilon_A \cdot \eta_A \\
&= Hg \cdot \varepsilon_{A'} \cdot Gf \cdot \eta_A \\
&= \mathrm{Ev}(\varepsilon, g) \cdot \mathrm{Ev}(\eta, f)
\end{aligned}$$

✓

Bemerkung 3.5.6 Jeder Evaluationsfunktor $\mathrm{Ev} : \mathbf{B}^{\mathbf{A}} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ induziert die folgenden Funktoren:

- Für jedes $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$:

  $$\mathrm{Ev}_A = \mathrm{Ev}(\_, A) : \mathbf{B}^{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathbf{B}$$

  mit $\mathrm{Ev}_A(F) = \mathrm{Ev}(F, A) = F(A)$ und $\mathrm{Ev}_A(\eta) = \mathrm{Ev}(\eta, \mathrm{id}_A) = \eta_A$.

- Für jedes $F \in \mathrm{ob}(\mathbf{B}^{\mathbf{A}})$:

  $$\mathrm{Ev}(F, \_) : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$$

  mit $\mathrm{Ev}(F, A) = F(A)$ und $\mathrm{Ev}(F, f) = \mathrm{Ev}(\mathrm{id}_F, f) = Ff$, d.h. $\mathrm{Ev}(F, \_) = F$.

Yoneda-Lemma

Sei $\mathbf{A}$ nicht notwendig klein und $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$. Dann existiert für alle $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ eine Bijektion

$$\mathrm{Nat}(\mathbf{A}(A, \_), G) \cong GA.$$

Beweis: Definiere

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Nat}(\mathbf{A}(A, \_), G) & \xrightarrow{\Phi} & GA \\ \lambda & \longmapsto & \lambda_A(\mathrm{id}_A) \\ \lambda^a & \longleftarrow\!\shortmid & a \end{array}$$

wobei λ^a für $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ durch

$$\lambda^a_B : \mathbf{A}(A, B) \longrightarrow GB, \quad f \longmapsto Gf(a)$$

definiert ist.

Zunächst ist zu zeigen, dass λ^a eine natürliche Transformation $\mathbf{A}(A, \_) \longrightarrow G$ ist. Dies folgt aus

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "h"'] & \mathbf{A}(A,B) \arrow[r, "\lambda^a_B"] \arrow[d, "\mathbf{A}(A,h)"'] & GB \arrow[d, "Gh"] & f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & Gf(a) \arrow[d, mapsto] \\ B' & \mathbf{A}(A,B') \arrow[r, "\lambda^a_{B'}"'] & GB' & h \cdot f \arrow[r, mapsto] & G(hf)(a) \end{tikzcd}$$

Nun ist noch die Bijektivität von Φ zu zeigen. Nach Definition folgt für $a \in GA$ sofort

$$\Phi(\lambda^a) = \lambda^a_A(\mathrm{id}_A) = G(\mathrm{id}_A)(a) = a.$$

Ferner sei $\lambda : \mathbf{A}(A, \_) \longrightarrow G$, $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$ und $f \in \mathbf{A}(A, B)$, dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda^{\Phi(\lambda)}_B(f) = \lambda^{\lambda_A(\mathrm{id}_A)}_B(f) &= Gf(\lambda_A(\mathrm{id}_A)) \\ &= Gf \cdot \lambda_A(\mathrm{id}_A) \\ &= \lambda_B \cdot \mathbf{A}(A, f)(\mathrm{id}_A) = \lambda_B(f), \end{aligned}$$

d.h. $\lambda^{\Phi(\lambda)} = \lambda$. ✓

Folgerung 3.5.7 Seien $A, B \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$, dann gilt $\mathrm{Nat}(\mathbf{A}(A, \_), \mathbf{A}(B, \_)) \cong \mathbf{A}(B, A)$.

Beweis: Wende das Yoneda-Lemma an für $G = \mathbf{A}(B, \_)$. Dabei ist λ^f für $f \in \mathbf{A}(B, A)$ gegeben durch

$$\lambda^f_C(h) = \mathbf{A}(B, \_)(h)(f) = \mathbf{A}(B, h)(f) = h \cdot f.$$

Daher schreiben wir suggestiv $\mathbf{A}(f, \_)$ für λ^f. ✓

Ist nun $\mathbf{A}$ eine kleine Kategorie, so können wir

$$\begin{array}{rcl} E : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathbf{Set}^{\mathbf{A}} \\ A & \longmapsto & \mathbf{A}(A, \_) \\ f & \longmapsto & \mathbf{A}(f, \_) \end{array}$$

betrachten. Dies ist offenbar ein Funktor. Weiterhin ist E nach obiger Folgerung voll und treu, sowie offensichtlich injektiv auf Objekten. Damit haben wir gezeigt:

Folgerung 3.5.8 $E : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{A}}$ ist eine volle Einbettung, genannt *Yoneda-Einbettung*.

Kapitel 4

Limiten

4.1 Quellen und Senken

In diesem Abschnitt sei stets $\mathbf{A}$ eine Kategorie.

Definition 4.1.1 Eine *Quelle* ist ein Paar

$$(A, (A \xrightarrow{f_i} A_i)_{i \in I})$$

wobei I eine Klasse ist, $A, A_i \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ und f_i entsprechende Morphismen. Man nennt A auch den *Domain* der Quelle und $(A_i)_{i \in I}$ den *Codomain*.

Bemerkung 4.1.2 Jeder Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ ist eine Quelle $(A, A \xrightarrow{f} B)$, jedes Objekt A gibt eine Quelle $(A, \emptyset)$.

Definition 4.1.3 Eine Quelle $(A, (f_i)_{i \in I})$ heißt *Monoquelle* (kurz MQ), falls für jedes Paar $g, h : B \longrightarrow A$ gilt

$$(\forall i \in I : f_i \cdot g = f_i \cdot h) \implies g = h.$$

Eine Quelle $(A, (f_i)_{i \in I})$ heißt *extremale Monoquelle*, falls $(A, (f_i)_{i \in I})$ ein MQ ist mit der folgenden (extremalen) Eigenschaft: Hat $(A, (f_i)_{i \in I})$ eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "e"'] & A_i \\ & B \arrow[u, "g_i"'] \end{tikzcd} \qquad \text{für alle } i \in I$$

mit einer Quelle $(B, (g_i)_{i \in I})$, so gilt

$$e \text{ Epimorphismus} \implies e \text{ Isomorphismus}.$$

Bemerkung 4.1.4 (i) Der duale Begriff zu Quelle lautet *Senke*, dies ist dann ein Paar

$$((A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}, A).$$

Entsprechend werden *(extremale)Episenken* definiert.

(ii) $(A, \emptyset)$ ist genau dann eine Monoquelle, wenn A *prä-terminal* in $\mathbf{A}$ ist, d.h. wenn es für jedes $\mathbf{A}$-Objekt B höchstens einen Morphismus $B \longrightarrow A$ gibt (äquivalent $\mathrm{card}(\mathbf{A}(B, A)) \leq 1$).

(iii) (A, f) ist genau dann eine (extremale) Monoquelle, wenn f ein (extremaler) Monomorphismus ist.

(iv) Für jede Teilmenge $J \subset I$ gilt: Ist $(A, (f_i)_{i\in J})$ eine Monoquelle, so auch $(A, (f_i)_{i\in I})$.

Beispiele 4.1.5 (1) In **Set** ist $(A, (f_i)_{i\in I})$ genau dann eine Monoquelle, wenn die Familie $(f_i)_{i\in I}$ *punktetrennend* ist, d.h. wenn gilt

$$\forall x, y \in A, x \neq y\ \exists i \in I: \ f_i(x) \neq f_i(y).$$

Ferner ist $((e_i)_{i\in I}, B)$ genau dann eine Episenke, wenn die Familie $(e_i)_{i\in I}$ *überdeckend* ist, d.h. wenn gilt $B = \bigcup_{i\in I} e_i[B_i]$.

(2) In **Top** ist eine Monoquelle $(A, (f_i)_{i\in I})$ genau dann extremal , wenn A die initiale Topologie bezüglich der Familie $(f_i)_{i\in I}$ trägt. In $\mathbf{Top_0}$ (topologische Räume mit T_0 Trennungseigenschaft) ist jede initiale Familie eine extremale Monoquelle, da sie punktetrennend ist.

(3) In **Grp** und **R-Mod** ist $((f_i)_{i\in I}, B)$ genau dann eine Episenke, wenn $B = \langle \bigcup_{i\in I} f_i[B_i]\rangle$.

4.2 Produkte und Coprodukte

Wir greifen in diesem Abschnitt schon ein wenig vor und untersuchen eine spezielle Klasse von Quellen und Senken bzw. eine spezielle Sorte von Limiten und Colimiten, nämlich Produkte und Coprodukte. Dieser Vorgriff soll die Motivation für die allgemeine Definition von Limiten und Colimiten im nächsten Abschnitt erleichtern. Binäre Produkte haben wir schon im Einführungskapitel kennen gelernt.

Im folgenden sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten in einer Kategorie $\mathbf{A}$.

Definition 4.2.1 Ein *Produkt* von $(A_i)_{i\in I}$ ist eine Quelle

$$(A, (\pi_i)_{i\in I}) = (A, (A \xrightarrow{\pi_i} A_i)_{i\in I})$$

mit Codomain $(A_i)_{i\in I}$, welche die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für *jede* Quelle $(B, (p_i)_{i\in I})$ mit Codomain $(A_i)_{i\in I}$ existiert genau ein Morphismus $B \xrightarrow{p} A$ derart, dass für alle $i \in I$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "p_i"'] & A \arrow[d, "\pi_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

kommutiert. Der von $(p_i)_{i\in I}$ induzierte Morphismus wird mit $\langle p_i\rangle$ bezeichnet.

Beispiele 4.2.2 (1) Jede kleine (d.h. über eine *Menge* I indizierte) Familie von Mengen $(A_i)_{i\in I}$ besitzt ein Produkt in **Set**, nämlich das übliche kartesische Produkt:

$$\left(\prod_{i\in I} A_i, (\prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_i} A_i)_{i\in I}\right)$$

(2) In den Kategorien **Grp** und **Top** lassen sich Produkte (kleiner Familien) $(A_i)_{i\in I}$ wie folgt konstruieren: Man bilde das kartesische Produkt der entsprechenden Mengen in **Set** und versehe es mit der initialen Gruppenstruktur (d.h. komponentenweise Rechnen) bzw. mit der initialen Topologie (bezüglich der Familie $(\pi_i)_{i\in I}$ der Projektionen). Auch hier findet die Schreibweise $\prod_{i\in I} A_i$ Verwendung.

Bemerkung 4.2.3 Der duale Begriff zu Produkt lautet *Coprodukt*. Das Coprodukt einer Familie $(A_i)_{i\in I}$ wird mit

$$\left((A_i \xrightarrow{\mu_i} \coprod_{i\in I} A_i)_{i\in I}, \coprod_{i\in I} A_i\right)$$

bezeichnet.

Beispiele 4.2.4 (1) In **Set** sind Coprodukte kleiner Familien $(A_i)_{i\in I}$ *disjunkte Vereinigungen*:

$$C := \bigcup_{i\in I} A_i \times \{i\}, \quad A_i \xrightarrow{\mu_i} C,\ a \longmapsto (a,i).$$

(2) In **Top** gehe man analog wie im Falle der Produkte vor: Man bilde das Coprodukt der jeweiligen Trägermengen in **Set** (etwa wie in (1)) und versehe es mit der finalen Topologie bezüglich der Abbildungen $(\mu_i)_{i\in I}$ in (1). In der Topologie wird dies auch als *topologische Summe* bezeichnet.

(3) In **Grp** ist eine analoge Konstruktion wie im Falle der Produkte nicht möglich (Warum?). Das kategorielle Coprodukt entspricht hier den *freien Produkten* aus der Gruppentheorie. Dazu ist die Existenz *freier Objekte* über einer Menge notwendig. Der Beweis, dass solche *freien Gruppen* existieren, ist Bestandteil von Übungsaufgabe 3 in A.4.

(4) Fasst man eine prä-geordnete Menge als Kategorie auf, so entspricht dort das Produkt dem Infimum und das Coprodukt dem Supremum.

Satz 4.2.5 Zu je zwei Produkten $(P,(p_i)_{i\in I})$, $(Q,(q_i)_{i\in I})$ einer Familie $(A_i)_{i\in I}$ gibt es genau einen Isomorphismus $P \xrightarrow{\varphi} Q$ derart, dass für alle $i \in I$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "p_i"'] & & Q \arrow[dl, "q_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Die jeweilige universelle Eigenschaft von $(P,(p_i)_{i\in I})$ und $(Q,(q_i)_{i\in I})$ induziert Morphismen f, g derart, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\cdot f"] \arrow[dr, "q_i"'] & P \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, "p_i"] & Q \arrow[dl, "q_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

Damit erfüllt $g \cdot f$ für alle $i \in I$

$$q_i \cdot (g \cdot f) = q_i.$$

Die Identität $\mathrm{id}_Q : Q \longrightarrow Q$ erfüllt dies offenbar auch. Wegen der universellen Eigenschaft gibt es aber *genau einen* Morphismus h mit $q_i \cdot h = q_i$ für alle $i \in I$. Somit folgt $g \cdot f = \mathrm{id}_Q$, analog zeigt man $f \cdot g = \mathrm{id}_P$. Damit ist $\varphi = g$ der gewünschte Isomorphismus. ✓

Satz 4.2.6 Produkte sind extremale Monoquellen.

Beweis: Zunächst zeigen wie die Monoquellen-Eigenschaft. Sei dazu $(P, (p_i)_{i\in I})$ ein Produkt, sowie f, g zwei Morphismen mit $p_i \cdot f = p_i \cdot g$ für alle $i \in I$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr, "p_i f = p_i g"'] & P \arrow[d, "p_i"] \\
& A_i
\end{tikzcd}$$

Damit ist $(A, (p_i f)_{i\in I})$ eine Quelle mit Codomain $(A_i)_{i\in I}$. Dann gibt es genau einen Morphismus h mit $p_i \cdot h = p_i \cdot f (= p_i \cdot g)$, also folgt $f = g$.

Um die extremale Eigenschaft zu zeigen, betrachte die folgende Faktorisierung der Quelle $(P, (p_i)_{i\in I})$:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_i"] \arrow[dr, "e"'] & A_i \\
& B \arrow[u, "g_i"']
\end{tikzcd} \quad \text{für alle } i \in I.$$

Dabei sei e ein Epimorphismus. Da $(P, (p_i)_{i\in I})$ ein Produkt ist, induziert die Familie $(g_i)_{i\in I}$ einen Morphismus $\langle g_i \rangle : B \longrightarrow P$, dieser erfüllt dann

$$p_j \cdot \langle g_i \rangle \cdot e = g_j \cdot e = p_j = p_j \cdot \mathrm{id}_P$$

für alle $j \in I$. Damit folgt aus der Monoquellen-Eigenschaft $\langle g_i \rangle \cdot e = \mathrm{id}_P$, d.h. e ist Schnitt und Epimorphismus zugleich, also Isomorphismus. ✓

Betrachten wir nun einen Sonderfall eines Produktes. Ist etwa $I = \emptyset$, so entspricht das Produkt $(T, \emptyset)$ dieser leeren Familie einem Objekt T derart, dass es für jedes Objekt (leere Quelle) $A \mathrel{\widehat{=}} (A, \emptyset)$ genau einen Morphismus $A \longrightarrow T$ gibt. Wir halten fest:

Bemerkung 4.2.7 In jeder Kategorie gilt: T terminales Objekt $\Longleftrightarrow$ T Produkt von $\emptyset$.

Nun führen wir noch eine Schreibweise ein: Sei $I = \{1, 2\}$, dann bezeichnen wir das Produkt von (A_1, A_2) mit $(A_1 \times A_2, (\pi_1, \pi_2))$ bzw. kurz mit $A_1 \times A_2$. Produkte von zweielementigen Familien nennt man auch *binäre Produkte*. Oft bezeichnet man die Produktquelle eines binären Produktes $A \times B$ mit (π_A, π_B).

Bemerkung 4.2.8 Ist T ein terminales Objekt in $\mathbf{A}$, so gibt es für alle $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ einen natürlichen Isomorphismus $A \times T \cong A$.

Beweis: Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A & A \arrow[l, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[r, "!_A"] & T \\ & B \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "!_B"'] & \end{tikzcd}$$

Hierbei bezeichnen $!_A, !_B$ die jeweils eindeutig existierenden Morphismen ins terminale Objekt. Offenbar ist $(A, (\mathrm{id}_A, !_A))$ eine passende Quelle mit Codomain (A, T). Ist $(B, (f, g))$ auch eine Quelle mit Codomain (A, T), so folgt zunächst $g = !_B$, da T terminal ist. Ferner ist $f = \varphi$ ein Morphismus mit $!_A \cdot \varphi = !_B$ und $\mathrm{id}_A \cdot \varphi = f$, aufgrund der zweiten Gleichung sogar eindeutig bestimmt. Dies zeigt $A \cong A \times T$.

Im Falle der speziellen Quelle $(A \times T, (\pi_A, \pi_T))$ ist nach Obigem der Isomorphismus $A \times T \cong A$ gegeben durch $\pi_A : A \times T \longrightarrow A$. Dieser ist offenbar natürlich:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & A \times T \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "f \times T"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B & B \times T \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd}$$

denn $f \times T = \langle f \cdot \pi_A, \pi_T \rangle$, d.h. $\pi_B \cdot (f \times T) = f \cdot \pi_A$. ✓

Folgerung 4.2.9 Ist T ein terminales Objekt in $\mathbf{A}$, so ist der Funktor $T \times \_ : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ natürlich isomorph zu $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}$.

Schließlich gibt es noch einen nahe liegenden Zusammenhang zwischen (extremalen) Monoquellen und (extremalen) Monomorphismen:

Satz 4.2.10 Die Familie $(A_i)_{i \in I}$ habe ein Produkt $(A, (p_i)_{i \in I})$ in $\mathbf{A}$. Dann gilt für jede Quelle $(B, (f_i)_{i \in I})$ mit Codomain $(A_i)_{i \in I}$:

$$(B, (f_i)_{i \in I}) \text{ (extremale) MQ} \iff \langle f_i \rangle \text{ (extremaler) Monomorphismus}$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $(B, (f_i)_{i \in I})$ ein Monoquelle. Weiter seien f, g zwei Morphismen mit $\langle f_i \rangle \cdot f = \langle f_i \rangle \cdot g$. Dann folgt:

$$f_j \cdot f = \pi_j \cdot \langle f_i \rangle \cdot f = \pi_j \cdot \langle f_i \rangle \cdot g = f_j \cdot g$$

für alle $j \in I$, d.h. $f = g$ aufgrund der Monoquellen-Eigenschaft.

Ist $(B, (f_i)_{i \in I})$ eine extremale Monoquelle und hat $\langle f_i \rangle$ eine Faktorisierung $\langle f_i \rangle = g \cdot e$ mit einem Epimorphismus e, so kommutiert für alle $j \in I$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, "\langle f_i \rangle"] & A_j \\ C \arrow[r, "g"'] & A \arrow[u, "p_j"'] \end{tikzcd}$$

d.h. $(p_j \cdot g) \cdot e = f_j$ $(j \in I)$ ist eine Faktorisierung der Quelle $(B, (f_i)_{i \in I})$ mit einem Epimorphismus e, also ist e ein Isomorphismus.

"$\Leftarrow$": Umgekehrt sei $\langle f_i \rangle$ ein Monomorphismus und es gelte $f_j \cdot f = f_j \cdot g$ für alle $j \in I$. Dann folgt:

$$p_j \cdot \langle f_i \rangle \cdot f = f_j \cdot f = f_j \cdot g = p_j \cdot \langle f_i \rangle \cdot g$$

für alle $j \in I$, d.h. $\langle f_i \rangle \cdot f = \langle f_i \rangle \cdot g$, also $f = g$.

Ist nun $\langle f_i \rangle$ ein extremaler Monomorphismus und $g_j \cdot e = f_j$ $(j \in I)$ eine Faktorisierung mit einem Epimorphismus e, so betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\langle f_i \rangle"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, "f_j"] & A \arrow[d, "p_j"] \\ C \arrow[r, "g_j"'] & A_j \end{tikzcd}$$

Dann gibt es einen induzierten Morphismus $\langle g_i \rangle : C \longrightarrow A$ mit

$$p_j \cdot \langle f_i \rangle = g_j \cdot e = p_j \cdot \langle g_i \rangle \cdot e$$

für alle $j \in I$. Es folgt $\langle f_i \rangle = \langle g_i \rangle \cdot e$, also ist e ein Isomorphismus. ✓

4.3 Limiten und Colimiten

Wie wir gesehen haben, sind Produkte und Coprodukte allgemeine Umschreibungen für bekannte Konstruktionen in verschiedenen Kategorien. Dabei ist die universelle Eigenschaft der Produkte bzw. Coprodukte fundamental gewesen. Wir werden nun eine geeignete, kategorielle Verallgemeinerung vornehmen, die viele bekannte Konstruktionen als Spezialfälle enthält. Im folgenden sei wieder $\mathbf{A}$ eine Kategorie.

Definition 4.3.1 (1) Ein *Diagramm* in einer Kategorie $\mathbf{A}$ ist ein Funktor $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ mit einer kleinen Kategorie $\mathbf{I}$, genannt das *Schema* des Diagramms.

(2) Sei $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ ein Diagramm. Eine *natürliche Quelle* für D ist eine Quelle $(L, (l_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ mit Codomain $(D(i))_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})}$, so dass für alle $\mathbf{I}$-Morphismen $i \xrightarrow{m} j$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & D(i) \arrow[dd, "D(m)"] \\ L \arrow[ur, "l_i"] \arrow[dr, "l_j"'] & \\ & D(j) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Der duale Begriff lautet *natürliche Senke*.

(3) Sei $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ ein Diagramm. Ein *Limes* von D (plural: *Limiten*) ist eine natürliche Quelle $(L, (l_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ für D derart, dass zu *jeder* natürlichen Quelle $(L', (l'_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ für D genau ein $h : L' \longrightarrow L$ existiert mit $l_i \cdot h = l'_i$ für alle $i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})$:

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[dd, dashed, "h"'] \arrow[dr, "l'_i"] & \\ & D(i) \\ L \arrow[ur, "l_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{für alle } i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I}).$$

Hier ist der duale Begriff der des *Colimes* (plural: *Colimiten*).

Beispiele 4.3.2 (1) $\mathbf{I} = \emptyset$: T ist Limes von $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A} \Longleftrightarrow T$ ist terminales Objekt.

(2) Sei $\mathbf{I} = \{1, 2\}$, dann ist ein Diagramm $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ nichts weiter als ein Paar von **A**-Objekten $D(1) =: A$, $D(2) =: B$. Eine natürliche Quelle für D ist dann einfach eine Quelle

$$A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B \ = (P, (P \xrightarrow{p_1} A, P \xrightarrow{p_2} B)).$$

Diese ist genau dann ein Limes von D, wenn $(P, (p_1, p_2))$ ein Produkt von (A, B) ist.

(3) Analog zu (2) zeigt man, dass Limiten $(L, (l_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ von diskreten Diagrammen, d.h. von Diagrammen $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ mit $\mathbf{I} = I$ diskret, Produkte $(\prod_{i \in I} D(i), (\pi_i)_{i \in I})$ $(\pi_i = l_i)$ sind.

Das letzte Beispiel legt die Aussagen der folgenden beiden Sätze nahe:

Satz 4.3.3 Limiten sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt: Sind $(L, (l_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ und $(L', (l'_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ Limiten eines Diagramms $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$, so existiert genau ein Isomorphismus $\varphi : L \longrightarrow L'$, so dass für alle $i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})$

$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[dr, "l'_i"] \arrow[dd, dashed, "\varphi"'] & \\
& D(i) \\
L \arrow[ur, "l_i"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Geht völlig analog zum Beweis von Satz 4.2.5. ✓

Satz 4.3.4 Ist $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ ein Diagramm und $(L, (l_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ ein Limes von D, so ist $(L, (l_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ eine extremale Monoquelle.

Beweis: Wir überlassen diese einfache Übungsaufgabe dem Leser, als Hinweis verweisen wir auf den Beweis zu Satz 4.2.6. ✓

Beispiele 4.3.5 (1) Sei $\mathbf{I} = \bullet \rightrightarrows \bullet$. Dann ist ein Diagramm $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ nichts anderes als ein Paar $f, g : A \longrightarrow B$ von **A**-Morphismen. Eine Quelle $(E, (e_A, e_B))$ mit Codomain (A, B) ist genau dann natürlich, wenn $f \cdot e_A = e_B = g \cdot e_A$ gilt, d.h. eine natürliche Quelle für D ist nichts anderes als ein Paar (E, e), wobei $E \xrightarrow{e} A$ $(= e_A)$ ein Morphismus ist mit $f \cdot e = g \cdot e$.

Daher ist (E, e) genau dann ein Limes von D, wenn es für jedes Paar $(D, D \xrightarrow{d} A)$ mit $f \cdot d = g \cdot d$ genau ein $h : D \longrightarrow E$ gibt mit $e \cdot h = d$:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
D \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "d"'] & &
\end{tikzcd}$$

In diesem Fall heißt (E, e) auch *Egalisator* von (f, g). Der duale Begriff ist der des *Coegalisators*.

(2) In der Kategorie **Set** konstruiert man Egalisatoren wie folgt: Zu einem Paar $f, g : A \longrightarrow B$ von Abbildungen bildet man die Menge

$$E := \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}.$$

Dann ist E zusammen mit der Inklusion $e : E \hookrightarrow A$ der Egalisator (E, e) von (f, g).

Definition 4.3.6 Ein Morphismus $E \xrightarrow{e} A$ in $\mathbf{A}$ ist ein *regulärer Monomorphismus*, falls es ein Paar von Morphismen $f, g : A \longrightarrow B$ gibt, so dass (E, e) der Egalisator von (f, g) ist. Der duale Begriff ist der des *regulären Epimorphismus*.

Bemerkung 4.3.7 Jeder reguläre Monomorphismus ist extremal, da er eine (einelementige) Limesquelle ist. In **Ring** entsprechen den regulären Epimorphismen genau die Quotienten.

Beispiel 4.3.8 Sei $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ das folgende Diagramm:

$$\mathbf{I} = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \quad \overset{D}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Eine natürliche Quelle für D lässt sich wie folgt durch ein kommutatives Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "d"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Das heißt eine natürliche Quelle für D ist ein Paar (p, q) mit $g \cdot q = f \cdot p$ $(= d)$. Diese ist genau dann ein Limes von D, wenn es für jedes Paar $(P' \xrightarrow{p'} A, P' \xrightarrow{q'} B)$ mit $g \cdot q' = f \cdot p'$ genau ein $h : P' \longrightarrow P$ gibt mit $p \cdot h = p'$, $q \cdot h = q'$:

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "p'"] \arrow[ddr, bend right, "q'"'] & & \\ & P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Definition 4.3.9 Ein Limes von einem Diagramm $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ mit einem Schema der Form

$$\mathbf{I} = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

wird *Pullback* genannt. Sprechweise: Im obigen Beispiel etwa sagt man auch kurz, dass

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

ein *Pullback* ist.

Beispiel 4.3.10 Sei B eine Menge mit Teilmengen $A, A' \subset B$. Dann ist der Durchschnitt $A \cap A'$ zusammen mit den jeweiligen Inklusionen ein Pullback in **Set**:

$$\begin{tikzcd} A \cap A' \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook, "\iota_A"] \\ A' \arrow[r, hook, "\iota_{A'}"'] & B \end{tikzcd}$$

Satz 4.3.11 In jeder Kategorie **A** sind äquivalent:

(1) $f : A \longrightarrow B$ ist ein Monomorphismus.

(2) $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$ ist ein Pullback.

Beweis: "$\Rightarrow$": Man betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "g=h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Für jedes solche Paar (g, h) mit $f \cdot g = f \cdot h$ folgt $g = h$, da f ein Monomorphismus ist. Also existiert h eindeutig mit $\mathrm{id}_A \cdot h = g$, $\mathrm{id}_A \cdot h = h$.

"$\Leftarrow$": Umgekehrt gelte $f \cdot g = f \cdot h$, dann erhält man aufgrund der Pullback-Eigenschaft ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

mit $\mathrm{id}_A \cdot k = g$, $\mathrm{id}_A \cdot k = h$, d.h. mit $g = h$. ✓

Satz 4.3.12 Monomorphismen sind *Pullback-stabil*, d.h. ist $f : A \longrightarrow C$ ein Monomorphismus und

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

ein Pullback, so ist auch q ein Monomorphismus. Sprechweise: q ist *Pullback von f entlang g*.

Beweis: Seien h, h' zwei Morphismen mit $q \cdot h = q \cdot h'$. Betrachte folgendes Diagramm, in dem nach Voraussetzung das untere Quadrat kommutiert:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[d, shift left, "h'"] \arrow[dr, bend left, "p\cdot h=p\cdot h'"] & \\ P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Zunächst folgt

$$f \cdot (p \cdot h) = g \cdot q \cdot h = g \cdot q \cdot h' = f \cdot (p \cdot h'),$$

also auch $p \cdot h = p \cdot h'$, da f ein Monomorphismus ist. Somit kommutiert das ganze Diagramm. Wegen

$$f \cdot (p \cdot h) = g \cdot (q \cdot h)$$

und der Pullback-Eigenschaft gibt es genau ein $k : Q \longrightarrow P$ mit

$$p \cdot k = p \cdot h, \; q \cdot k = q \cdot h.$$

Da aber auch h und h' diese Eigenschaft von k haben, folgt schließlich $h = h'$. ✓

Satz 4.3.13 Sei T ein terminales Objekt in $\mathbf{A}$. Äquivalent sind:

1. $\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, "!_A"] \\ B \arrow[r, "!_B"'] & T \end{tikzcd}$ ist ein Pullback.

2. $(P, (p, q))$ ist ein Produkt von (A, B).

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $(Q, (Q \xrightarrow{g} A, Q \xrightarrow{f} B))$ eine Quelle mit Codomain (A, B). Betrachte

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\ & P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, "!_A"] \\ & B \arrow[r, "!_B"'] & T \end{tikzcd}$$

Weil T terminal ist, gilt $!_A \cdot g =!_B \cdot f$ Also gibt es genau ein h, wie im obigen Diagramm, mit $p \cdot h = g$ und $q \cdot h = f$, d.h. $(P, (p, q))$ ist ein Produkt von (A, B).

"$\Leftarrow$": Seien umgekehrt $Q \xrightarrow{g} A, Q \xrightarrow{f} B$ mit $!_A \cdot g =!_B \cdot f$. Dann ist $(Q, (g, f))$ eine Quelle mit Codomain (A, B), d.h. es gibt genau ein h, so dass

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, "!_A"] \\
& B \arrow[r, "!_B"'] & T
\end{tikzcd}$$

kommutiert. ✓

Satz 4.3.14 (Kanonische Konstruktion von Pullbacks) Seien $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ gegeben und $(A \times B, (\pi_A, \pi_B))$ ein Produkt von (A, B). Ist (E, e) der Egalisator von $(g \cdot \pi_B, f \cdot \pi_A)$, so ist der äußere Rahmen von

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\pi_B \cdot e"] \arrow[dr, "e"] \arrow[dd, "\pi_A \cdot e"'] & & B \arrow[dd, "g"] \\
& A \times B \arrow[ur, "\pi_B"'] \arrow[dl, "\pi_A"] & \\
A \arrow[rr, "f"'] & & C
\end{tikzcd}$$

ein Pullback.

Beweis: Seien $P \xrightarrow{p} B, P \xrightarrow{q} A$ mit $g \cdot p = f \cdot q$. Dann ist $(P, (q, p))$ eine Quelle mit Codomain (A, B). Also gibt es genau ein $m : P \longrightarrow A \times B$ mit $\pi_A \cdot m = q$ und $\pi_B \cdot m = p$. Dann folgt

$$(g \cdot \pi_B) \cdot m = g \cdot p = f \cdot q = (f \cdot \pi_A) \cdot m.$$

Aufgrund der Egalisator-Eigenschaft gibt es genau ein $h : P \longrightarrow E$ mit $e \cdot h = m$:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "m"] \arrow[drrr, bend left, "p"] \arrow[dddr, bend right, "q"'] & & & \\
& E \arrow[dr, "e"] & & B \arrow[dd, "g"] \\
& & A \times B \arrow[ur, "\pi_B"'] \arrow[dl, "\pi_A"] & \\
& A \arrow[rr, "f"'] & & C
\end{tikzcd}$$

Es folgt

$$(\pi_B \cdot e) \cdot h = \pi_B \cdot m = p$$

und

$$(\pi_A \cdot e) \cdot h = \pi_A \cdot m = q.$$

Erfüllt $h' : P \longrightarrow E$ auch diese beiden Gleichungen, so gilt

$$\pi_B \cdot (e \cdot h) = p = \pi_B \cdot (e \cdot h')$$

und

$$\pi_A \cdot (e \cdot h) = q = \pi_A \cdot (e \cdot h').$$

Da $(A \times B, (\pi_A, \pi_B))$ als Produkt eine Monoquelle ist, folgt $e \cdot h = e \cdot h'$. Als Egalisator ist e auch ein Monomorphismus, daher erhält man $h = h'$. ✓

Beispiel 4.3.15 Wir wollen uns nun die kanonische Konstruktion von Pullbacks in der Kategorie **Set** veranschaulichen: Man rechnet mit obigem Satz leicht nach, dass

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

genau dann ein Pullback in **Set** ist, wenn

$$\begin{aligned} P &\cong \{(a,b) \in A \times B \mid g \cdot \pi_B(a,b) = f \cdot \pi_A(a,b)\} \\ &= \{(a,b) \in A \times B \mid g(b) = f(a)\} \end{aligned}$$

gilt. Ist $B \subset C$ und $g = \iota_B : B \hookrightarrow C$, $b \mapsto b$, so erhält man

$$P = \{(a,b) \in A \times B \mid b = f(a)\} = \mathrm{Graph}(f).$$

Pushouts

Sei $\mathbf{I}$ wie oben und $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ ein Diagramm. Dann ist $D^{\mathrm{op}} : \mathbf{I}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{op}}$ ein Diagramm mit

$$\mathbf{I}^{\mathrm{op}} = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd}$$

d.h. D ist im wesentlichen ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B & \end{tikzcd}$$

in **A**. Ein Colimes eines solchen Diagramms nennt man einen *Pushout*, dies ist der zu "Pullback" duale Begriff. Ein Pushout des obigen Diagramms lässt sich wie folgt kurz veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "p"] \arrow[ddr, bend left, "p'"] & \\ B \arrow[r, "q"'] \arrow[drr, bend right, "q'"'] & P \arrow[dr, dashed, "h", "\exists!"'] & \\ & & P' \end{tikzcd}$$

Nun führen wir noch einige Sprech- bzw. Schreibweisen ein: Sei $\bullet \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \bullet$ ein paralleles Paar von Morphismen, dann definiere

$$(E, e) \approx \mathrm{Eq}(f, g) \iff E \xrightarrow{e} \bullet \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \bullet \text{ ist Egalisator}$$

und

$$(c, C) \approx \mathrm{Coeq}(f, g) \iff \bullet \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \bullet \xrightarrow{c} C \text{ ist Coegalisator.}$$

Generell: Ist $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ ein Diagramm, so sagt man

$$(L, (l_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})}) \approx \lim D \iff (L, (l_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})}) \text{ ist Limes von } D$$

und entsprechend für Colimiten. Oft bezeichnet man auch einen Pullback wie folgt:

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Definition 4.3.16 Eine Kategorie **A** *hat (endliche) Produkte*, falls jedes Diagramm $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$, **I** (endlich) klein und diskret, einen Limes besitzt. Analog definiert man: **A** *hat Egalisatoren* bzw. *hat Pullbacks*. Allgemein heißt **A** *(endlich) vollständig*, falls jedes Diagramm $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$, **I** (endlich) klein, einen Limes hat. Analoges gilt für Colimiten.

Folgerung 4.3.17 (1) Hat **A** Pullbacks und ein terminales Objekt, so hat **A** endliche Produkte.

(2) Hat **A** Pullbacks und endliche Produkte, so hat **A** Egalisatoren.

(3) Hat **A** endliche Produkte und Egalisatoren, so hat **A** Pullbacks.

Lässt man die Endlichkeitsbedingung fallen und ersetzt "Pullback" durch "multiplen Pullback", so bleibt der Satz gültig. Dabei sind *multiple Pullbacks* eine geeignete, offensichtliche Verallgemeinerung der normalen, endlichen Pullbacks.[1]

[1] Siehe z.B. [1] oder [8].

Beweis: Aussage (1) folgt aus 4.3.13, und (3) folgt aus 4.3.14.

zu (2): Sei $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$. Wir konstruieren nun denn Egalisator von (f, g) mit Produkten und Pullbacks: Betrachte

$$\begin{tikzcd}
 & B & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[r, dashed, "\langle f,g\rangle"] & B \times B \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] & B \arrow[ul, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_B"] \arrow[l, dashed, "\Delta_B"'] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

Dabei sind die gestrichelten Pfeile die offensichtlichen, Produkt-induzierten. Bilde dann den Pullback

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\
A \arrow[r, "\langle f,g\rangle"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$

Dann ist (E, p) ein Egalisator von (f, g):

- Zunächst gilt

$$f \cdot p = \pi_1 \cdot \langle f, g\rangle \cdot p = \pi_1 \cdot \Delta_B \cdot q = q$$

  sowie

$$g \cdot p = \pi_2 \cdot \langle f, g\rangle \cdot p = \pi_2 \cdot \Delta_B \cdot q = q,$$

  also $f \cdot p = g \cdot p$.

- Sei nun $h : D \longrightarrow A$ mit $f \cdot h = g \cdot h$. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed, "d"] \arrow[drr, bend left, "f\cdot h = g\cdot h"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
 & E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\
 & A \arrow[r, "\langle f,g\rangle"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$

  Der äußere Rahmen kommutiert wegen

$$\pi_1 \cdot \langle f, g\rangle \cdot h = f \cdot h = \mathrm{id}_B \cdot f \cdot h = \pi_1 \cdot \Delta_B \cdot f \cdot h$$

  und

$$\pi_2 \cdot \langle f, g\rangle \cdot h = g \cdot h = \mathrm{id}_B \cdot f \cdot h = \pi_2 \cdot \Delta_B \cdot f \cdot h,$$

  denn $(B \times B, (\pi_1, \pi_2))$ ist eine Monoquelle. Also gibt es wegen der Pullback-Eigenschaft genau ein d wie im Diagramm mit $p \cdot d = h$ (und $q \cdot d = f \cdot h$).

- Ist nun auch $d' : D \longrightarrow E$ ein Morphismus mit $p \cdot d' = h$, so folgt zunächst $p \cdot d = p \cdot d'$. Es gilt aber auch $q \cdot d = q \cdot d'$:

$$\Delta_B \cdot q \cdot d = \langle f, g \rangle \cdot p \cdot d = \langle f, g \rangle \cdot p \cdot d' = \Delta_B \cdot q \cdot d'$$

  und offenbar ist Δ_B ein Monomorphismus. Somit folgt aus der Monoquellen-Eigenschaft von $(E, (q, p))$, dass $d = d'$ ist.

✓

Satz 4.3.18 Sei $\mathbf{A}$ eine Kategorie, dann sind äquivalent:

(1) $\mathbf{A}$ ist (endlich) vollständig.

(2) $\mathbf{A}$ hat (endliche) Produkte und Egalisatoren.

Beweis: "$\Rightarrow$": Klar nach Definition.
"$\Leftarrow$": Wir geben nur die Beweisidee an und überlassen die genauere Ausführung, welche "straightforward" funktioniert, dem Leser zur Übung. Sei $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ ein Diagramm mit $\mathbf{I}$ klein. Man betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & D(\mathrm{cod}\,u) \\
E \arrow[r, "e"] \arrow[d, dashed, "l_i"'] & \prod_{i\in\mathrm{ob}(\mathbf{I})} D(i) \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "f"'] \arrow[dl, "\pi_i"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{dom}\,u}"] \arrow[ur, bend left, "\pi_{\mathrm{cod}\,u}"] & \prod_{u\in\mathrm{mor}(\mathbf{I})} D(\mathrm{cod}\,u) \arrow[u, "\pi_u"'] \arrow[d, "\pi_u"] \\
D(i) & D(\mathrm{dom}\,u) \arrow[r, "D(u)"'] & D(\mathrm{cod}\,u)
\end{tikzcd}$$

Dabei sei $f := \langle D(u) \cdot \pi_{\mathrm{dom}\,u} \rangle$, $g := \langle \pi_{\mathrm{cod}\,u} \rangle$, $(E, e) \approx (f, g)$ und $l_i := \pi_i \cdot e$. Dann ist $(E, (l_i)_{i\in\mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ ein Limes von D. ✓

4.4 Funktoren und Limiten

Definition 4.4.1 Ein Funktor $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *bewahrt Limiten*, falls für jedes Diagramm $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ und jeden Limes $(L, (l_i)_{i\in\mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ von D in $\mathbf{A}$ $(FL, (Fl_i)_{i\in\mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ ein Limes von $F \cdot D$ in $\mathbf{B}$ ist. Analog definiert man: F *bewahrt Produkte, Egalisatoren, Colimiten*, etc.

Beispiele 4.4.2 (1) Für jede Menge A bewahrt $A \times \_ : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ Coprodukte, da

$$A \times \coprod_{i\in I} A_i \cong \coprod_{i\in I} (A \times A_i),$$

wie man leicht nachrechnet.

(2) Für $\mathbf{X} = \mathbf{Top}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Ring}, \mathbf{R\text{-}Mod}$ bewahrt der *Vergissfunktor* $U : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Set}$, der jedem Objekt (d.h. topologischen Raum, etc.) die unterliegende Menge zuordnet, alle Limiten. Man rechnet z.B. leicht nach, dass der Egalisator in $\mathbf{Set}$ zweier Morphismen aus $\mathbf{X}$ nicht nur eine Menge ist, sondern tatsächlich die Trägermenge eines Objektes in $\mathbf{X}$.

Ferner zeigt Satz 4.3.18, dass die Kategorien **Grp**, **Ab**, **Ring** und **R-Mod** vollständig sind. Doch in Bezug auf Funktoren zeigt er noch viel mehr:

Satz 4.4.3 Sei $\mathbf{A}$ (endlich) vollständig und $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor. Dann sind äquivalent:

(1) F bewahrt (endliche) Limiten.

(2) F bewahrt (endliche) Produkte und Egalisatoren.

Beweis: Folgt sofort aus Satz 4.3.18. ✓

Man beachte die Notwendigkeit vorauszusetzen, dass $\mathbf{A}$ vollständig ist, also Egalisatoren und Produkte hat.

Satz 4.4.4 hom-Funktoren bewahren Limiten.

Beweis: Sei $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ und $F := \hom(A, \_) : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$. Weiter sei $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ ein Diagramm mit Limes $(L, (l_i)_{i\in\mathrm{ob}(\mathbf{I})})$. Klar ist, dass $(FL, (Fl_i)_{i\in\mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ eine natürliche Quelle für $F \cdot D$ ist. Sei also

$$\left(X, \left(X \xrightarrow{f_i} \hom(A, D(i))\right)_{i\in\mathrm{ob}(\mathbf{I})}\right)$$

auch eine natürliche Quelle für $F \cdot D$. Dann ist offenbar für jedes $x \in X$

$$\left(A, \left(A \xrightarrow{f_i(x)} D(i)\right)_{i\in\mathrm{ob}(\mathbf{I})}\right)$$

eine natürliche Quelle für D. Also gibt es für jedes $x \in X$ genau einen Morphismus $f(x) : A \longrightarrow L$, so dass

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f_i(x)"] \arrow[dd, dashed, "f(x)"'] & \\ & D(i) \\ L \arrow[ur, "l_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{für alle } i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})$$

kommutiert. Die so definierte Abbildung $f : X \longrightarrow \hom(A, L)$, $x \mapsto f(x)$ ist dann eindeutig bestimmt mit der Eigenschaft $Fl_i \cdot f = f_i$. ✓

4.5 Limiten in Funktorkategorien

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Konstruktion von Limiten in Funktorkategorien. Dazu benötigen wir zunächst folgendes Theorem:

Theorem 4.5.1 Seien $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{A}$ Kategorien und $D : \mathbf{I} \times \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{A}$ ein Funktor. Weiter habe für alle $i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})$ der Funktor $D(i, \_) : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{A}$ einen Limes $(L_i, (l^i_j)_{j\in\mathrm{ob}(\mathbf{J})})$. Dann gilt:

(1) Es existiert ein eindeutig bestimmter Funktor $F : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ derart, dass für $i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})$ $F(i) = L_i$ gilt und für alle $m : i \longrightarrow i'$ in $\mathbf{I}$, $j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J})$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(i) = L_i \arrow[r, "l_j^i"] \arrow[d, "F(m)"'] & D(i,j) \arrow[d, "D(m,j)"] \\ F(i') = L_{i'} \arrow[r, "l_j^{i'}"] & D(i',j) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(2) D hat genau dann einen Limes, wenn F einen Limes besitzt:

$$(L, (p_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})}) \text{ Limes von } F \iff (L, (l_j^i \cdot p_i)_{(i,j) \in \mathrm{ob}(\mathbf{I} \times \mathbf{J})}) \text{ Limes von } D.$$

Man erhält also den Limes von D durch “punktweise” Auswertung.

Beweis: Der Beweis ist nicht schwierig, aber etwas technisch, daher verweisen wir auf [8]. ✓

Daraus ergibt sich unmittelbar:

Folgerung 4.5.2 Seien $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ kleine Kategorien. Hat $\mathbf{A}$ Limiten für alle Diagramme $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ sowie für alle Diagramme $D' : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{A}$ (d.h. ist $\mathbf{A}$ sowohl $\mathbf{I}$- als auch $\mathbf{J}$-vollständig), so hat $\mathbf{A}$ Limiten für alle Diagramme $D'' : \mathbf{I} \times \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{A}$.

Folgerung 4.5.3 (Vertauschbarkeit von Limiten) Seien $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ kleine Kategorien. Die KategorieA habe Limiten für alle Diagramme $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$, $D' : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{A}$, und $D'' : \mathbf{I} \times \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{A}$ sei ein Funktor. Dann gilt:

$$\lim_{\mathbf{J}}(\lim_{\mathbf{I}} D''(i,j)) \approx \lim_{\mathbf{I} \times \mathbf{J}} D'' \approx \lim_{\mathbf{I}}(\lim_{\mathbf{J}} D''(i,j)).$$

Dies nennt man auch die “Fubini-Formel für Limiten”.

Der folgende, intuitiv klare Zusammenhang führt unter Verwendung des obigen Theorems direkt zur Konstruktion von Limiten in Funktorkategorien:

Lemma 4.5.4 Seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ kleine Kategorien und $\mathbf{C}$ beliebig. Dann gilt:

$$\left(\mathbf{C}^{\mathbf{B}}\right)^{\mathbf{A}} \cong \mathbf{C}^{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}.$$

Beweis: Auch hier ist die Aussage intuitiv klar, aber die Ausführung etwas mühsam. Der geübte Leser kann hieran seine formalen Fähigkeiten testen, alle anderen verweisen wir erneut auf [8]. ✓

Theorem 4.5.5 (Limiten in Funktorkategorien) Sei $\mathbf{A}$ klein, $\mathbf{B}$ beliebig und $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ ein Diagramm. Hat für alle $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ der Funktor

$$\mathrm{Ev}_A \cdot D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{B} \;=\; D(\_)(A) : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{B}$$

einen Limes $(L^A, (l_i^A)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})})$, so hat D eine Limes $(F, (q_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})})$, wobei

$$\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{B} \in \mathrm{ob}(\mathbf{B}^{\mathbf{A}})$$

mit $F(A) = L^A$ und jedes q_i ist eine natürliche Transformation $(l_i^A)_{A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})} : F \longrightarrow D(i)$.

Beweis: Wir können nach dem Lemma $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ als Funktor $\overline{D} : \mathbf{I} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ auffassen:

$$\overline{D}(i, A) = D(i)(A) = (\mathrm{Ev}_A \cdot D)(i).$$

Der Rest ergibt sich dann aus dem obigem Theorem, d.h. durch "punktweises Auswerten". ✓

Das bedeutet: Limiten in Funktorkategorien konstruiert man, indem man $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ punktweise an jeder Stelle $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ auswertet und dann von $\mathrm{Ev}_A \cdot D = D(\_)(A) : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{B}$ den Limes bildet!

Folgerung 4.5.6 Sei $\mathbf{A}$ klein und $\mathbf{B}$ vollständig, dann ist auch $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ vollständig.

Die Eigenschaft der Vollständigkeit vererbt sich also von der Basiskategorie $\mathbf{B}$ auf $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$. Entsprechende duale Sätze über Colimiten gelten natürlich auch.

Back to Yoneda

Wir betrachten noch einmal die Yoneda-Einbettung $E : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}}$ unter dem Aspekt der Limiten. Ferner deuten wir noch einige weiterführende Sätze an, die sich in der Literatur finden.

Satz 4.5.7 Sei $\mathbf{A}$ klein. Die Yoneda-Einbettung $E : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}}$ bewahrt Limiten.

Beweis: Übungsaufgabe (siehe Anhang). ✓

Im Falle von $\mathbf{B} = \mathbf{Set}$ gibt es zu Theorem 4.5.5 eine Art Umkehrung:

Satz 4.5.8 Sei $\mathbf{A}$ klein. Zu jedem Funktor $F : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ existiert ein Diagramm $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}}$, so dass F Colimes-Objekt von D ist.

Beweis: Siehe [5], Band I, Kapitel 2. ✓

Theorem 4.5.9 Sei $\mathbf{A}$ klein. Dann ist $\mathbf{Set}^{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}}$ zusammen mit der Yoneda-Einbettung $E : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}}$ eine *freie Covervollständigung von* $\mathbf{A}$, d.h.

(1) $\mathbf{Set}^{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}}$ ist covollständig.

(2) Für jeden Funktor $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ in eine covollständige Kategorie $\mathbf{C}$ existiert genau ein Colimiten-bewahrender Funktor $F^\sharp : \mathbf{Set}^{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathbf{C}$, so dass

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "E"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbf{Set}^{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}} \arrow[d, dashed, "\exists! \, F^\sharp"] \\ & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Sei $H : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ ein Objekt in $\mathbf{Set}^{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}}$. Nach dem obigem Satz ist H Colimes-Objekt eines geeigneten Diagramms $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}}$, wobei jedes $D(i)$ die Form $\mathbf{A}(\_, A_i)$ hat. Setze dann $F^\sharp(H) = \operatorname{colim} FA_i$ und prüfe die geforderten Eigenschaften nach. ✓

$F^\sharp$ ist ein Spezialfall einer so genannten *Kan-Erweiterung* von F.

Darstellbare Funktoren

Abschließend betrachten wir noch eine spezielle Klasse von Funktoren $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$ und deren Eigenschaften, nämlich Funktoren, die "fast" hom-Funktoren sind.

Definition 4.5.10 Sei $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$ ein Funktor. Eine *Darstellung* für G ist ein Paar (A, λ), mit $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ und $\lambda : \mathbf{A}(A, \_) \longrightarrow G$ ein natürlicher Isomorphismus. G heißt *darstellbar*, falls eine solche Darstellung für G existiert.

Satz 4.5.11 Darstellbare Funktoren bewahren Limiten.

Beweis: hom-Funktoren bewahren Limiten, also wegen der natürlichen Isomorphie auch darstellbare Funktoren. ✓

Satz 4.5.12 Darstellungen sind (bis auf Isomorphie) eindeutig, d.h. sind (A, λ) und (A', λ') Darstellungen für $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$, so existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $f : A' \longrightarrow A$ so dass

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}(A, \_) \arrow[dd, dashed, "\mathbf{A}(f, \_)"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\ & G \\ \mathbf{A}(A', \_) \arrow[ur, "\lambda'"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Übungsaufgabe. ✓

Beispiele 4.5.13 (1) Der Vergissfunktor $U : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$ mit $U(X, \tau) = X$ hat eine Darstellung $U \cong \mathbf{Top}(\{*\}, \_)$ mit dem einelementigen Raum $\{*\}$.

(2) Der Vergissfunktor $U : \mathbf{R\text{-}Mod} \longrightarrow \mathbf{Set}$ hat eine Darstellung $U \cong \mathbf{R\text{-}Mod}(R, \_)$, wobei R als Modul über sich selbst aufgefasst wird.

Die folgenden beiden Aussagen sind erst nach dem Studium des fünften Kapitels verständlich. Wir greifen jedoch schon einmal vor und formulieren sie in diesem Kontext. Sie beschreiben den Zusammenhang zwischen Darstellungen und adjungierten Situationen.

Satz 4.5.14 Der Funktor $U : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$ habe einen Linksadjungierten $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{A}$. Dann ist $F1$ mit $1 = \{*\}$ ein darstellendes Objekt für U.

Beweis: Aufgrund einer Charakterisierung adjungierter Situationen gilt

$$UX \cong UX^1 \cong \mathbf{Set}(1, UX) \cong \mathbf{A}(F1, X)$$

für alle $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$, d.h. es gilt $U \cong \mathbf{A}(F1, \_)$. ✓

Folgerung 4.5.15 Sei $U : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$ ein Funktor und A ein *freies Objekt über* $1 = \{*\}$, d.h. es gebe einen U-universellen Pfeil $1 \longrightarrow UA$. Weiter habe $\mathbf{A}$ beliebige Copotenzen $M \cdot A = \coprod_{m \in M} A$ für jede Menge M. Dann hat U einen Linksadjungierten.

Beweis: Sei $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ und M eine Menge. Dann gilt

$$\mathbf{A}(M \cdot A, X) \cong \mathbf{A}(A, X)^M \cong \mathbf{Set}(1, UX)^M \cong \mathbf{Set}(M \cdot 1, UX) \cong \mathbf{Set}(M, UX)$$

denn hom-Funktoren bewahren Produkte, d.h. kontravariante hom-Funktoren $\hom(\_, *)$ führen Copotenzen in Potenzen über. Ferner gilt die zweite Isomorphie, weil es einen U-universellen Pfeil $1 \longrightarrow UA$ gibt. Also ist der Funktor $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{A}$ mit $F(M) = M \cdot A$ linksadjungiert zu U. ✓

4.6 Eigenschaften von hom-Funktoren & Generatoren

Im folgenden sei $\mathbf{C}$ stets eine Kategorie. Betrachte für $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ den kovarianten hom-Funktor

$$\hom(A, \_) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Wie man leicht nachrechnet, bewahrt dieser stets Monomorphismen. Ist nämlich $f : B \longrightarrow C$ ein $\mathbf{C}$-Mono, so ist $\hom(A, f)$ eine Abbildung

$$\hom(A, f) : \hom(A, B) \longrightarrow \hom(A, C).$$

Dann gilt für alle $x, y \in \hom(A, B)$:

$$\begin{aligned} \hom(A, f)(x) = \hom(A, f)(y) &\iff f \cdot x = f \cdot y \\ &\implies x = y, \end{aligned}$$

d.h. $\hom(A, f)$ ist injektiv, also ein $\mathbf{Set}$-Mono. Für Epimorphismen funktioniert dieser Beweis offenbar nicht, im allgemeinen ist $\hom(A, f)$ sicherlich nicht surjektiv. Daher ist durch diese Eigenschaft eine besondere Klasse von Objekten ausgezeichnet.

Definition 4.6.1 (1) Ein $\mathbf{C}$-Objekt P heißt $\mathbf{C}$-*projektiv*, falls der Funktor

$$\hom(P, \_) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

Epimorphismen bewahrt.

(2) Dual dazu heißt $Q \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ $\mathbf{C}$-*injektiv*, falls der Funktor

$$\hom(\_, Q) : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

Epimorphismen bewahrt.

Bemerkung 4.6.2 Wir schreiben in diesem Abschnitt der Kürze halber $\hom(A, \_)$ für $\hom_{\mathbf{C}}(A, \_) = \mathbf{C}(A, \_)$ bzw. $\hom(\_, A)$ für $\hom_{\mathbf{C}}(\_, A) = \mathbf{C}(\_, A)$, sofern keine Verwechslungsgefahr besteht. Nichtsdestotrotz gelten für hom-Funktoren stets die folgenden Beziehungen:

$$\hom_{\mathbf{C}}(\_, A) = \hom_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(A, \_) : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

bzw. umformuliert

$$\hom_{\mathbf{C}}(A, \_) = \hom_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(\_, A) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Für $\mathbf{C}^{\text{op}}$-Objekte B gilt nämlich nach Definition $\hom_{\mathbf{C}}(B, A) = \hom_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(A, B)$. Ist $f : B \longrightarrow C$ ein $\mathbf{C}^{\text{op}}$-Morphismus und $g \in \hom_{\mathbf{C}}(B, A)$, so gilt wieder nach Definition

$$\hom_{\mathbf{C}}(f, A)(g) = g \cdot f = f \star g = \hom_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(A, f)(g),$$

also gelten obige Gleichungen. Damit ist leicht einzusehen, dass "injektiv" der duale Begriff zu "projektiv" ist. Ist nämlich $Q \in \text{ob}(\mathbf{C}^{\text{op}})$, so dass $\hom_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(Q, \_)$ Epimorphismen bewahrt, so ist auch $Q \in \text{ob}(\mathbf{C})$ und $\hom_{\mathbf{C}}(\_, Q)$ bewahrt Epimorphismen.

Satz 4.6.3 (Char. v. proj. Obj.) Ein $\mathbf{C}$-Objekt P ist genau dann $\mathbf{C}$-projektiv, wenn für jeden $\mathbf{C}$-Epi $f : B \longrightarrow C$ und jeden $\mathbf{C}$-Morphismus $g : P \longrightarrow C$ ein Morphismus $h : P \longrightarrow B$ existiert, so dass

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} P \text{ projektiv} &\iff \hom(P, \_) \text{ bewahrt Epimorphismen} \\ &\iff \forall_{\mathbf{C}\text{-Epi}}\ B \xrightarrow{f} C \text{ ist } \hom(P, f) : \hom(P, B) \longrightarrow \hom(P, C) \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

✓

Damit lässt sich auch die duale Eigenschaft anhand eines Diagramms kurz charakterisieren:

$$Q \text{ ist } \mathbf{C}\text{-injektiv} \quad \iff \quad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\forall_{\mathbf{C}\text{-Mono}} f"] \arrow[d, "\forall g"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists h"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Man beachte, dass für injektives Q der Funktor $\hom(\_, Q)$ einen $\mathbf{C}^{\text{op}}$-Epi f (d.h. einen $\mathbf{C}$-Mono f) in eine surjektive Abbildung $\hom(f, Q)(\_) = (\_) \cdot f$ überführt.

Beispiele 4.6.4 (1) In der Kategorie **R-Mod** ist ein Objekt P genau dann **R-Mod**-projektiv (-injektiv), wenn P ein projektiver (injektiver) R-Modul ist. Dies war die ursprüngliche Motivation für die kategorielle Definition von "projektiv" bzw. "injektiv".

(2) In der Kategorie **Top** sind die projektiven Objekte genau die diskreten topologischen Räume und die injektiven Objekte genau die indiskreten topologischen Räume.

Wie eingangs bemerkt bewahrt jeder Funktor $\hom(C, \_)$ für $C \in \text{ob}(\mathbf{C})$ Monomorphismen. Dabei gilt eine Art Umkehrung:

$$A \xrightarrow{f} B \text{ ist } \mathbf{C}\text{-Mono} \quad \iff \quad \hom(C, f) \text{ injektiv } \forall\, C \in \text{ob}(\mathbf{C}).$$

Denn gilt $f \cdot g = f \cdot h$ für $g, h : C \longrightarrow A$, so bedeutet dies $\hom(C, f)(g) = \hom(C, f)(h)$, woraus $g = h$ folgt, falls $\hom(C, f)$ injektiv ist. Diese Beobachtung gibt Anlass zu folgender

Definition 4.6.5 Sei I eine Menge und $(F_i : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B})_{i\in I}$ eine Familie von Funktoren. Für eine Kategorie $\mathbf{C}$ sei $P(\mathbf{C})$ ein kategorielle Eigenschaft, die ein Morphismus in $\mathbf{C}$ erfüllen kann (wie etwa "$\mathbf{C}$-Mono sein" oder ähnliches).

(1) Die Familie $(F_i)_{i\in I}$ *reflektiert kollektiv* die Eigenschaft P, falls für alle $f \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})$ gilt

$$F_i(f) \text{ erfüllt } P(\mathbf{B}) \text{ für alle } i \in I \quad \Longrightarrow \quad f \text{ erfüllt } P(\mathbf{A}).$$

(2) Die Familie $(F_i)_{i\in I}$ ist *kollektiv treu*, falls für alle $f, g \in \hom(A, B)$ gilt

$$F_i(f) = F_i(g)\ \forall\ i \in I \quad \Longrightarrow \quad f = g.$$

D.h. die Familie $(\hom(C, \_))_{C\in\mathrm{ob}(\mathbf{C})}$ reflektiert kollektiv Monomorphismen. Im allgemeinen ist eine Familie $(\hom(A, \_))_{A\in\mathcal{A}}$ für eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ aber nicht kollektiv treu.

Definition 4.6.6 (1) Eine Menge $\mathcal{G} \subset \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ heißt *Generatormenge* für $\mathbf{C}$ (oder in $\mathbf{C}$), falls die Familie $(\hom(G, \_))_{G\in\mathcal{G}}$ kollektiv treu ist.

(2) Ein Objekt $G \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ heißt *Generator* für $\mathbf{C}$ (oder in $\mathbf{C}$), falls $\{G\}$ eine Generatormenge ist.

Die dualen Begriffe lauten: *Cogeneratormenge* bzw. *Cogenerator*.

Bevor wir Beispiele erwähnen, geben wir zunächst wieder eine Charakterisierung des Begriffs.

Satz 4.6.7 (Char. v. Generatoren) Eine Menge $\mathcal{G} \subset \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ ist genau dann eine Generatormenge, wenn es zu jedem Paar von Morphismen $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ mit $f \neq g$ ein $G \in \mathcal{G}$ und ein $G \xrightarrow{x} A$ gibt mit

$$G \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} B \ \neq\ G \xrightarrow{x} A \xrightarrow{g} B.$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Es gelte $f \cdot x = g \cdot x$ für alle $\mathbf{C}$-Morphismen $G \xrightarrow{x} A$ mit $G \in \mathcal{G}$, d.h.

$$\hom(G, f) = \hom(G, g) \quad \forall\ G \in \mathcal{G}.$$

Dann folgt nach Voraussetzung $f = g$. Damit ist gezeigt:

$$f \neq g \quad \Longrightarrow \quad \exists\ G \in \mathcal{G},\ G \xrightarrow{x} A : \quad f \cdot x \neq g \cdot x.$$

"$\Leftarrow$": Sei $\hom(G, f) = \hom(G, g)$ für alle $G \in \mathcal{G}$. Wäre nun $f \neq g$, so gäbe es $G \xrightarrow{x} A$ mit $G \in \mathcal{G}$ und $f\cdot x \neq g\cdot x$, d.h. $\hom(G, f)(x) \neq \hom(G, g)(x)$, im Widerspruch zur Voraussetzung. ✓

D.h. ein Generator "trennt" parallele Morphismen, die verschieden sind. Daher werden Generatoren auch in manchen Büchern *Separatoren* genannt (bzw. Cogenerator=*Coseparator*). Die duale Charakterisierung ist ebenso einfach:

$$\mathcal{G} \text{ ist Cogeneratormenge} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\ A \underset{g}{\overset{f}{\underset{\neq}{\rightrightarrows}}} B\ \exists\ G \in \mathcal{G}, B \xrightarrow{x} G : \quad x \cdot f \neq x \cdot g.$$

Beispiele 4.6.8 (1) In den Kategorien **Set**, **Top** und $\mathbf{Top_2}$ (*Hausdorffräume* & stetige Abbildungen) ist ein Objekt G genau dann ein Generator, wenn $G \neq \emptyset$ gilt.

(2) $\mathbb{Z}$ mit Addition ist ein Generator für **Grp** und **Ab**.

(3) Ein unitärer Ring R ist ein Generator für **R-Mod**.

(4) Eine Menge M ist genau dann ein Cogenerator in **Set**, wenn $|M| \geq 2$ gilt.

(5) In **Top** ist $\underline{2} := \{0, 1\}$ versehen mit der indiskreten Topologie ein Cogenerator (und auch alle X, die $\underline{2}$ als indiskreten Teilraum haben).

(6) $\underline{2}$ ist ein Cogenerator für **BooAlg** (*Boolesche Algebren* & Homomorphismen).

(7) Das Einheitsintervall $[0, 1]$ ist ein Cogenerator für $\mathbf{CompT_2}$ (*kompakte Hausdorffräume* & stetige Abbildungen).

(8) Die Kategorien **Top** und **Ring** haben keine Cogeneratoren.

Satz 4.6.9 Für ein **C**-Objekt C sind äquivalent:

(1) C ist ein Cogenerator;

(2) für alle $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ ist

$$(X, \hom(X, C)) = (X, (X \xrightarrow{f} C)_{f \in \hom(X,C)})$$

eine Monoquelle.

Beweis: Ergibt sich unmittelbar aus der Definition bzw. obiger Charakterisierung. ✓

Diese Charakterisierung lässt sich leicht auf Cogeneratormengen verallgemeinern, wie die folgende Definition nahe legt, welche den Begriff der (Co-)Generatormenge noch etwas verschärft. Auch ist die duale Aussage leicht abzulesen.

Definition 4.6.10 Eine (Co-)Generatormenge $\mathcal{G}$ heißt *stark* (oder *extremal*), falls für alle $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$

$$(X, \hom(X, C)_{C \in \mathcal{G}}) = (X, (X \xrightarrow{f} C)_{C \in \mathcal{G}, f \in \hom(X,C)})$$

eine extremale Monoquelle ist (bzw. $(\hom(C, X)_{C \in \mathcal{G}}, X)$ eine extremale Episenke ist).

Satz 4.6.11 Die Kategorie **C** habe beliebige *Potenzen* des Objektes C (d.h. für jede Menge I existiere $C^I := \prod_{i \in I} C$), dann sind äquivalent:

(1) C ist ein (extremaler) Cogenerator;

(2) für alle $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ ist der induzierte Morphismus

$$X \longrightarrow C^{\hom(X,C)}$$

ein (extremaler) Monomorphismus;

(3) für alle $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ ist X ein (extremales) Unterobjekt einer Potenz C^I von C.

Beweis: "(1) ⇒ (2)": Betrachte den induzierten Morphismus $\varphi := \langle f \rangle_{f \in \hom(X,C)}$ mit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & C^{\hom(X,C)} \arrow[d, "\pi_f"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Ist dann C ein (extremaler) Cogenerator, so ist nach obigem Satz bzw. nach Definition $(X, \hom(X,C))$ eine (extremale) Monoquelle. Dann ist aber auch φ ein (extremaler) Monomorphismus.

"(2) ⇒ (3)": Klar.

"(3) ⇒ (1)": Sei $X \xrightarrow{f} C^I$ ein extremaler Monomorphismus. Es gilt $f = \langle \pi_i \cdot f \rangle_{i \in I}$, denn man hat $\pi_j \cdot f = \pi_j \cdot \langle \pi_i \cdot f \rangle_{i \in I}$ für alle $j \in I$. Da der induzierte Morphismus $\langle \pi_i \cdot f \rangle_{i \in I}$ ein (extremaler) Monomorphismus ist, ist

$$(X, (X \xrightarrow{\pi_i f} C)_{i \in I})$$

eine (extremale) Monoquelle. Wegen

$$\{\pi_i \cdot f \mid i \in I\} \subset \hom(X,C)$$

ist dann auch $(X, \hom(X,C))$ eine (extremale) Monoquelle, also ist C ein (extremaler) Cogenerator. ✓

Beispiele 4.6.12 (1) Das Einheitsintervall $[0,1]$ ist ein extremaler Generator und ein extremaler Cogenerator in $\mathbf{CompT_2}$.

(2) In den Kategorien **Grp**, **R-Mod** und **Set** stimmen die Cogeneratoren und die extremalen Cogeneratoren überein.

Kapitel 5

Adjunktionen

The slogan is "Adjoint functors arise everywhere".

S. Mac Lane

5.1 Universelle Pfeile & Charakterisierungen

Definition 5.1.1 Sei $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor und $B \in \text{ob}(\mathbf{B})$. Dann heißt ein Paar $(A_B, B \xrightarrow{u_B} GA_B)$ mit $A_B \in \text{ob}(\mathbf{A})$, $u_B \in \text{mor}(\mathbf{B})$, *$G$-universeller Pfeil für B*, falls zu jedem $\mathbf{B}$-Morphismus $f : B \longrightarrow GA$ mit $A \in \text{ob}(\mathbf{A})$ genau ein $\mathbf{A}$-Morphismus $\bar{f} : A_B \longrightarrow A$ mit $G\bar{f} \cdot u_B = f$ existiert, d.h. falls das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u_B"] \arrow[dr, "\forall\ f"'] & GA_B \arrow[d, "G\bar{f}"] & A_B \arrow[d, dashed, "\exists!\ \bar{f}"] \\ & GA & A \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung 5.1.2 Offenbar ist (A_B, u_B) genau dann ein G-universeller Pfeil für B, wenn (A_B, u_B) initiales Objekt in $B \downarrow G$ ist. Zur Erinnerung: Die Objekte von $B \downarrow G$ sind Paare (A, b) mit $B \xrightarrow{b} GA \in \text{mor}(\mathbf{B})$, $A \in \text{ob}(\mathbf{A})$ und die Morphismen $(A, b) \xrightarrow{h} (A', b')$ sind $\mathbf{A}$-Morphismen $h : A \longrightarrow A'$, für die

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "b'"] & \\ GA \arrow[rr, "Gh"'] & & GA' \end{tikzcd}$$

kommutiert. Da initiale Objekte in einer Kategorie bis auf Isomorphie eindeutig sind, folgt, dass *universelle Pfeile bis auf Isomorphie eindeutig* sind. Vier Beispiele universeller Pfeile aus (linearer) Algebra und Topologie sind im Einführungskapitel zu finden.

Die folgende Definition wird durch die beiden nachfolgenden Sätze motiviert. Aus Gründen der Übersichtlichkeit führen wir sie zuerst auf.

Definition 5.1.3 Seien $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ Funktoren und

$$\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{B}} \longrightarrow GF \quad , \quad \varepsilon : FG \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$$

natürliche Transformationen. Dann heißt das Quadrupel $(F, G, \eta, \varepsilon)$ *Adjunktion* oder auch *adjungierte Situation*, falls die Gleichungen

(A$_1$) $\quad G\varepsilon \cdot \eta_G = \mathrm{id}_G$

(A$_2$) $\quad \varepsilon_F \cdot F\eta = \mathrm{id}_F$

erfüllt sind. Wir schreiben dann ‘ $F \overset{\eta}{\underset{\varepsilon}{\longrightarrow\!\!\!\!\dashv}} G(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ’ oder kurz ‘ $F \overset{\eta}{\underset{\varepsilon}{\longrightarrow\!\!\!\!\dashv}} G$ ’ für ‘$(F, G, \eta, \varepsilon)$ ist eine Adjunktion’ und nennen η die *Einheit* der Adjunktion und ε die *Co-Einheit*. Man sagt, F ist *linksadjungiert* zu G (bzw. G hat einen *Linksadjungierten*) und G ist *rechtsadjungiert* zu F (bzw. F hat einen *Rechtsadjungierten*).

Man beachte, dass die Definition “unsymmetrisch” in F und G ist, d.h. die Rollen der beiden Funktoren sind i.a. nicht vertauschbar. Die Bezeichnung mit ‘rechts’ bzw. ‘links’, die sich auch in der Notation $F \overset{\eta}{\underset{\varepsilon}{\longrightarrow\!\!\!\!\dashv}} G$ wiederspiegelt, wird später durch eine andere Charakterisierung motiviert. Zunächst stellen wir den Zusammenhang zu den universellen Pfeilen dar.

Satz 5.1.4 Sei $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor, so dass für jedes $\mathbf{B}$-Objekt B ein G-universeller Pfeil

$$(A_B, B \xrightarrow{u_B} GA_B)$$

existiert. Dann gibt es genau eine adjungierte Situation $F \overset{\eta}{\underset{\varepsilon}{\longrightarrow\!\!\!\!\dashv}} G$ mit

$$FB = A_B \quad \text{und} \quad \eta_B = u_B \qquad \text{für alle } B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B}).$$

Beweis: (i) Setze $FB := A_B$ und $\eta_B := u_B$ für jedes $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$. Sei nun $B \xrightarrow{f} C \in \mathrm{mor}(\mathbf{B})$. Dann erhält man nach Voraussetzung ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "f"'] & GA_B \arrow[d, "GFf"] & A_B = FB \arrow[d, dashed, "\exists!\, Ff"] \\ C \arrow[r, "\eta_C"'] & GA_C & A_C = FC \end{tikzcd} \qquad (*)$$

welches die Existenz und Eindeutigkeit eines $\mathbf{A}$-Morphismus $Ff : FB \longrightarrow FC$ sichert. Dadurch wird ein Funktor $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ definiert:

- $F\,\mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{FB}$, denn es gilt $GF(\mathrm{id}_B) \cdot \eta_B = \eta_B = G(\mathrm{id}_{FB}) \cdot \eta_B$ und η_B ist G-universeller Pfeil;

- $F(g \cdot f) = Fg \cdot Ff$, denn es gilt für $B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D$ nach Definition

$$\begin{aligned} GF(g \cdot f) \cdot \eta_B &= \eta_D \cdot g \cdot f \\ &= GFg \cdot \eta_C \cdot f \\ &= GFg \cdot GFf \cdot \eta_B = G(Fg \cdot Ff) \cdot \eta_B \end{aligned}$$

und η_B ist G-universeller Pfeil.

Außerdem ist $\eta = (\eta_B)_{B\in \mathrm{ob}(\mathbf{B})}$ nach $(*)$ eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{B}} \longrightarrow GF$.

(ii) Definiere für alle $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ ε_A durch die universelle Eigenschaft von η_{GA}:

$$\begin{tikzcd} GA \arrow[r, "\eta_{GA}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{GA}"'] & G(FGA) \arrow[d, "G\varepsilon_A"] \\ & GA \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FGA \arrow[d, dashed, "\exists!\ \varepsilon_A"] \\ A \end{tikzcd}$$

Dann ist $\varepsilon = (\varepsilon_A)_{A\in \mathrm{ob}(\mathbf{A})} : FG \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ eine natürliche Transformation, denn für alle **A**-Morphismen $A \xrightarrow{f} A'$ erhält man folgendes Diagramm, in dem alles bis auf (?) kommutiert:

$$\begin{tikzcd} GA \arrow[r, "\eta_{GA}"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{GA}"] \arrow[d, "Gf"'] & GFGA \arrow[r, "G\varepsilon_A"] \arrow[d, "GFGf"'] \arrow[dr, phantom, "(?)"] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ GA' \arrow[r, "\eta_{GA'}"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{GA'}"'] & GFGA' \arrow[r, "G\varepsilon_{A'}"'] & GA'. \end{tikzcd}$$

Daraus folgt dann

$$G(f \cdot \varepsilon_A) \cdot \eta_{GA} = G(\varepsilon_{A'} \cdot FGf) \cdot \eta_{GA}$$

was schließlich $f \cdot \varepsilon_A = \varepsilon_{A'} \cdot FGf$ impliziert. Ferner gilt nach Definition von ε_A

$$G\varepsilon_A \cdot \eta_{GA} = \mathrm{id}_{GA} = (\mathrm{id}_G)_A$$

für alle $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$, d.h. es gilt $G\varepsilon \cdot \eta_G = \mathrm{id}_G$ und (A_1) ist erfüllt.

(iii) Es bleibt (A_2) zu zeigen. Betrachte dazu für $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$ folgendes Diagramm, in dem alles bis auf (?) kommutiert:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "\eta_B"'] & GFB \arrow[d, "GF\eta_B"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{GFB}"] \arrow[dr, phantom, "(?)"'] & \\ GFB \arrow[r, "\eta_{GFB}"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{GFB}"'] & GFGFB \arrow[r, "G\varepsilon_{FB}"'] & GFB. \end{tikzcd}$$

Es folgt

$$G(\mathrm{id}_{FB}) \cdot \eta_B = G(\varepsilon_{FB} \cdot F\eta_B) \cdot \eta_B$$

und schließlich $\mathrm{id}_{FB} = \varepsilon_{FB} \cdot F\eta_B$ für alle $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$, d.h. (A_2). ✓

Satz 5.1.5 Sei $F \underset{\varepsilon}{\overset{\eta}{\dashv}} G(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ und $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$. Dann ist

$$(FB, B \xrightarrow{\eta_B} GFB)$$

ein G-universeller Pfeil für B.

Beweis: (i) Existenz: Sei $f : B \longrightarrow GA$ ein **B**-Morphismus mit $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$. Betrachte das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "f"'] & GFB \arrow[d, "GFf"'] \arrow[ddr, bend left, "G(\varepsilon_A \cdot Ff)"] & \\
GA \arrow[r, "\eta_{GA}"] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{id}_{GA}"'] & GFGA \arrow[dr, "G\varepsilon_A"] & \\
& & GA
\end{tikzcd}$$

Dann ist $\bar{f} := \varepsilon_A \cdot Ff$ ein **A**-Morphismus mit $G\bar{f} \cdot \eta_B = f$.

(ii) Eindeutigkeit: Falls $h : FB \longrightarrow A$ auch ein **A**-Morphismus mit $Gh \cdot \eta_B = f$ ist, so ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
FB \arrow[rr, "\mathrm{id}_{FB}"] \arrow[dr, "F\eta_B"] \arrow[dd, "Ff"'] & & FB \arrow[dd, "h"] \\
& FGFB \arrow[ur, "\varepsilon_{FB}"'] \arrow[dl, "FGh"] & \\
FGA \arrow[rr, "\varepsilon_A"'] & & A,
\end{tikzcd}$$

d.h. es gilt $h = \varepsilon_A \cdot Ff = \bar{f}$. ✓

Damit haben wir gezeigt, dass ein Funktor $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ genau dann einen Linksadjungierten hat, wenn es zu *jedem* **B**-Objekt einen G-universellen Pfeil gibt. Da universelle Pfeile bis auf Isomorphie eindeutig sind, ist auch der Linksadjungierte zu einem Funktor bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (sofern er existiert):

Satz 5.1.6 Sei $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor und $F_1 \underset{\varepsilon^1}{\overset{\eta^1}{\longrightarrow\!\!\!\!\dashv}} G$, $F_2 \underset{\varepsilon^2}{\overset{\eta^2}{\longrightarrow\!\!\!\!\dashv}} G$ zwei adjungierte Situationen. Dann existiert genau ein natürlicher Isomorphismus $\varphi : F_1 \longrightarrow F_2$ mit

$$G\varphi \cdot \eta^1 = \eta^2 \quad \text{und} \quad \varepsilon^2 \cdot \varphi_G = \varepsilon^1.$$

Beweis: Da universelle Pfeile bis auf Isomorphie eindeutig sind, existiert zu jedem **B**-Objekt B ein eindeutig bestimmter Isomorphismus

$$\varphi_B : F_1B \longrightarrow F_2B \quad \text{mit} \quad G\varphi_B \cdot \eta^1_B = \eta^2_B.$$

Zeige nun, dass durch $\varphi := (\varphi_B)_{B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})}$ eine natürliche Transformation definiert wird. Sei dazu $f : B \longrightarrow C$ ein **B**-Morphismus. Betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "\eta^1_B"] \arrow[ddd, equal] & & & C \arrow[dl, "\eta^1_C"'] \arrow[ddd, equal] \\
& GF_1B \arrow[r, "GF_1f"] \arrow[d, "G\varphi_B"'] \arrow[dr, phantom, "(?)"] & GF_1C \arrow[d, "G\varphi_C"] & \\
& GF_2B \arrow[r, "GF_2f"'] & GF_2C & \\
B \arrow[rrr, "f"] \arrow[ur, "\eta^2_B"] & & & C \arrow[ul, "\eta^2_C"']
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt dann $G(\varphi_C \cdot F_1 f) \cdot \eta^1_B = G(F_2 f \cdot \varphi_B) \cdot \eta^1_B$, d.h. $\varphi_C \cdot F_1 f = F_2 f \cdot \varphi_B$. Ferner ergibt sich für jedes **A**-Objekt A ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & GF_1GA \arrow[dd, "G\varphi_{GA}"'] \arrow[dr, "G\varepsilon^1_A"] & \\
GA \arrow[ur, "\eta^1_{GA}"] \arrow[dr, "\eta^2_{GA}"'] & & GA \arrow[l, phantom, "(?)"] \\
 & GF_2GA \arrow[ur, "G\varepsilon^2_A"'] &
\end{tikzcd}$$

aus dem $G(\varepsilon^2_A \cdot \varphi_{GA}) \cdot \eta^1_{GA} = G\varepsilon^1_A \cdot \eta^1_{GA}$ folgt, d.h. $\varepsilon^2_A \cdot \varphi_{GA} = \varepsilon^1_A$. ✓

Beim Dualisieren einer adjungierten Situation vertauscht sich nicht nur ‘Rechts’ und ‘Links’, sondern auch ‘Einheit’ und ‘Co-Einheit’, was deren Bezeichnung nachträglich rechtfertigt.

Satz 5.1.7 Äquivalent sind:

(1) $F \xrightarrow[\varepsilon]{\eta}\!\!\dashv G(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

(2) $G^{\mathrm{op}} \xrightarrow[\eta^{\mathrm{op}}]{\varepsilon^{\mathrm{op}}}\!\!\dashv F^{\mathrm{op}}(\mathbf{B}^{\mathrm{op}},\mathbf{A}^{\mathrm{op}})$.

Zur Erinnerung: Zu jedem Funktor $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ existiert ein Funktor $G^{\mathrm{op}} : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{B}^{\mathrm{op}}$, insbesondere gilt $(H \cdot G)^{\mathrm{op}} = H^{\mathrm{op}} \cdot G^{\mathrm{op}}$ für verknüpfbare Funktoren G, H. Dagegen existiert zu einer natürlichen Transformation $\varphi : H \longrightarrow G$ eine natürliche Transformation $\varphi^{\mathrm{op}} : G^{\mathrm{op}} \longrightarrow H^{\mathrm{op}}$ und es gilt $(\psi \cdot \varphi)^{\mathrm{op}} = \varphi^{\mathrm{op}} \cdot \psi^{\mathrm{op}}$.
Beweis: [des Satzes] Nach Definition ist klar:

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbf{B}} \xrightarrow{\eta} GF, \quad FG \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{id}_{\mathbf{A}} \\ G\varepsilon \cdot \eta_G = \mathrm{id}_G, \quad \varepsilon_F \cdot F\eta = \mathrm{id}_F \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} G^{\mathrm{op}}F^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\eta^{\mathrm{op}}} \mathrm{id}_{\mathbf{B}^{\mathrm{op}}}, \quad \mathrm{id}_{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}} \xrightarrow{\varepsilon^{\mathrm{op}}} F^{\mathrm{op}}G^{\mathrm{op}} \\ \eta^{\mathrm{op}}_{G^{\mathrm{op}}} \cdot G^{\mathrm{op}}\varepsilon^{\mathrm{op}} = (G\varepsilon \cdot \eta_G)^{\mathrm{op}} = \mathrm{id}_{G^{\mathrm{op}}}, \quad F^{\mathrm{op}}\eta^{\mathrm{op}} \cdot \varepsilon^{\mathrm{op}}_{F^{\mathrm{op}}} = (\varepsilon_F \cdot F\eta)^{\mathrm{op}} = \mathrm{id}_{F^{\mathrm{op}}} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad (2)
\end{aligned}$$

✓

Es folgt die eingangs angekündigte Charakterisierung adjungierter Situationen über hom-Mengen, welche die Bezeichnung ‘Rechts-’ bzw. ‘Linksadjungiert’ motiviert.

Theorem 5.1.8 Für Funktoren $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ sind äquivalent:

(1) Es gibt natürliche Transformationen η, ε mit $F \xrightarrow[\varepsilon]{\eta}\!\!\dashv G(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

(2) Zu jedem Paar von Objekten $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$, $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$ existiert eine Bijektion

$$\alpha_{B,A} : \mathbf{A}(FB, A) \longrightarrow \mathbf{B}(B, GA)$$

die natürlich in A und B ist.

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2): Sei $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ und $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$, dann ist $(FB, B \xrightarrow{\eta_B} GFB)$ ein G-universeller Pfeil nach 5.1.5. Dann ist die damit definierte Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \alpha_{B,A}: & \mathbf{A}(FB,A) & \longrightarrow & \mathbf{B}(B,GA) \\ & a & \mapsto & Ga \cdot \eta_B \end{array}$$

nach Definition des G-universellen Pfeils eine Bijektion. Um die Natürlichkeit der Bijektion zu zeigen sei $B' \xrightarrow{f} B \in \mathrm{mor}(\mathbf{B})$ und $A \xrightarrow{g} A' \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})$. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rrrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & & Ga\cdot\eta_B \arrow[ddd, mapsto] \\
& \mathbf{A}(FB,A) \arrow[r, "\alpha_{B,A}"] \arrow[d, "\mathbf{A}(Ff,g)"'] & \mathbf{B}(B,GA) \arrow[d, "\mathbf{B}(f,Gg)"] & & \\
& \mathbf{A}(FB',A') \arrow[r, "\alpha_{B',A'}"'] & \mathbf{B}(B',GA') & & \\
g\cdot a\cdot Ff \arrow[rrr, mapsto] & & & G(g\cdot a)\cdot GFf\cdot\eta_{B'} \arrow[r, equal, "(*)"] & G(g\cdot a)\cdot\eta_B\cdot f
\end{tikzcd}$$

was gerade die Natürlichkeit von $\alpha_{B,A}$ bedeutet. Dabei gilt $(*)$, weil η eine natürliche Transformation ist.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Setze für $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$

$$\eta_B := \alpha_{B,FB}(\mathrm{id}_{FB}) : B \longrightarrow GFB.$$

Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\mathbf{B}$-Morphismus $B \xrightarrow{f} GA$ mit $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ genau ein $FB \xrightarrow{\bar{f}} A$ mit $\alpha_{B,A}(\bar{f}) = f$. Betrachte dann das folgende, kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{FB} \in & \mathbf{A}(FB,FB) \arrow[r, "\alpha_{B,FB}"] \arrow[d, "\mathbf{A}(\mathrm{id}_{FB},\bar{f})"'] & \mathbf{B}(B,GFB) \arrow[d, "\mathbf{B}(\mathrm{id}_B,G\bar{f})"] \\
& \mathbf{A}(FB,A) \arrow[r, "\alpha_{B,A}"'] & \mathbf{B}(B,GA).
\end{tikzcd}$$

Ausgewertet an der Stelle id_{FB} folgt daraus

$$G\bar{f} \cdot \eta_B = G\bar{f} \cdot \alpha_{B,FB}(\mathrm{id}_{FB}) \cdot \mathrm{id}_B = \alpha_{B,A}(\bar{f} \cdot \mathrm{id}_{FB} \cdot \mathrm{id}_{FB}) = \alpha_{B,A}(\bar{f}) = f,$$

d.h. für alle $\mathbf{B}$-Objekte ist $(FB, B \xrightarrow{\eta_B} GFB)$ ein G-universeller Pfeil. Mit 5.1.4 folgt dann (1). ✓

Folgerung 5.1.9 Sind $F \underset{\varepsilon}{\overset{\eta}{\dashv}} G(\mathbf{A},\mathbf{B})$ und $S \underset{\rho}{\overset{\pi}{\dashv}} T(\mathbf{B},\mathbf{C})$ adjungierte Situationen, so auch

$$FS \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\dashv}} TG(\mathbf{A},\mathbf{C}),$$

wobei $\sigma = T\eta_S \cdot \pi$ und $\tau = \varepsilon \cdot F\rho_G$.

Beweis: Nach Theorem 5.1.8 existieren zu Objekten $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$, $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$, $C \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ natürliche Bijektionen $\alpha_{B,A}$ bzw. $\beta_{C,B}$ zu den beiden Adjunktionen. Betrachte dann für $C \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$, $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ die Bijektion

$$\gamma_{C,A} : \mathbf{A}(FSC, A) \xrightarrow{\alpha_{SC,A}} \mathbf{B}(SC, GA) \xrightarrow{\beta_{C,GA}} \mathbf{C}(C, TGA)\ .$$

Dann ist $\gamma_{C,A}$ auch natürlich in C und A, d.h. nach Theorem 5.1.8 gibt es natürliche Transformationen σ, τ mit $FS \xrightarrow[\tau]{\sigma}\!\dashv TG(\mathbf{A}, \mathbf{C})$. Der Nachweis der beiden Gleichungen für σ bzw. τ bleibt dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. [Hinweis: Die Gleichung für σ folgt direkt aus der Definition gemäß des zweiten Teils des Beweises zu 5.1.8 und für τ wende TG auf die zu zeigende Gleichung an, komponiere beide Seiten mit σ_{TGA} und rechne die Gleichheit nach.] ✓

Beispiele 5.1.10 (1) Sei $E : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ der Einbettungsfunktor und für eine Gruppe G bezeichne $[G, G]$ den *Kommutator* von G und $A_G := G/[G, G]$ die entsprechende Faktorgruppe. Dann ist die kanonische Projektion $\eta_G : G \longrightarrow A_G$ ein E-universeller Pfeil, *abelsche Reflektion* genannt (siehe auch 1.1.3 (4)):

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta_G"] \arrow[dr, "\forall_{\text{Hom.}}\ f"'] & EA_G \arrow[d, "Ef^*"] & A_G \arrow[d, dashed, "\exists!_{\text{Hom.}}\ f^*"] \\ & EA & A \end{tikzcd}$$

D.h. es gibt eine adjungierte Situation $F \xrightarrow[\varepsilon]{\eta}\!\dashv E$ mit $F(G) = A_G$, η_B wie oben und $\varepsilon_A = \mathrm{id}_A$ (identifiziere A mit $A/\langle 0\rangle$). Für einen Homomorphismus $f : G \longrightarrow G'$ ist dann Ff die offensichtliche Fortsetzung von f auf die Äquivalenzklassen von A_G. Ferner gilt $\hom(A_G, A) \cong \hom(G, A)$.

(2) Sei $U : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$ der kanonische Vergissfunktor. Dann existiert eine Adjunktion $F \xrightarrow[\varepsilon]{\eta}\!\dashv U$, denn mit $F(M) = (M, \mathcal{P}M)$ (diskreter topologischer Raum), $Ff = f$ ist $\eta_M = \mathrm{id}_M$ ein U-universeller Pfeil für M. Ferner ist für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ $\varepsilon_{(X,\mathcal{T})} = \mathrm{id}_X : (X, \mathcal{P}X) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$.

(3) Sei $U : \mathbf{R\text{-}Mod} \longrightarrow \mathbf{Set}$ der kanonische Vergissfunktor (R ein Ring mit Eins). Dann gibt es zu einer Menge M einen *freien R-Modul* über M:

$$FM := \{\varphi : M \longrightarrow R \mid \varphi \text{ Abb. }, Tr(\varphi) \text{ endl.}\}$$

Dabei ist $Tr(\varphi) = \{m \in M \mid \varphi(m) \neq 0\}$ der *Träger* von φ und FM wird mit der offensichtlichen Modulstruktur versehen. Für endliches M mit n Elementen gilt offenbar $FM \cong R^n$. Definiere nun

$$\eta_M(m) := \varphi_m : M \longrightarrow R,\ x \mapsto \begin{cases} 1 & x = m \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist $\eta_M : M \longrightarrow UFM$ ein U-universeller Pfeil für M, denn ist N ein R-Modul und $f : M \longrightarrow UN$, so fasse $\varphi \in FM$ als Tupel $\varphi = (r_m)_{m\in M}$ mit $r_m = \varphi(m) \in R$ auf und setze

$$\bar{f}(\varphi) := \sum_{m\in M} r_m \cdot f(m).$$

(Beachte, dass dies eine endliche Summe ist!) Falls M n-elementig ist, so folgt aufgrund der Adjunktion:

$$\mathbf{R\text{-}Mod}(FM, N) \cong \mathbf{Set}(M, UN) \cong (UN)^n$$

was insbesondere im Fall $R = K$ Körper, $N = K^m$ und n eine n-elementige Menge bedeutet

$$\hom(K^n, K^m) \cong \hom(F(n), K^m) \cong \mathbf{Set}(n, K^m) \cong K^{m\times n}.$$

(4) Sei $E : \mathbf{Comp_2} \longrightarrow \mathbf{Top_{3\frac{1}{2}}}$ der Einbettungsfunktor kompakter Hausdorffräume in die Kategorie der vollständig regulären topologischen Räume. Dann ist die Čech-Stone-Kompaktifizierung $\beta : X \longrightarrow \beta X$ für einen topologischer Raum X ein E-universeller Pfeil (siehe auch 1.1.3 (3)).

(5) Sei $\hom(V, \_) : \mathbf{Vec_K} \longrightarrow \mathbf{Vec_K}$ der *interne* hom-*Funktor* auf der Kategorie aller K-Vektorräume und Vektorraumhomomorphismen, d.h. $\hom(V, W)$ ist die Menge aller Vektorraumhomomorphismen von V nach W, aufgefasst als K-Vektorraum. Dann gibt es zu jedem K-Vektorraum U einen $\hom(V, \_)$-universellen Pfeil $\eta_U : U \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, U \otimes V)$, wobei $U \otimes V$ das Tensorprodukt bezeichne (siehe auch 1.1.3 (2)). Dann ist $(\_) \otimes V \underset{\varepsilon}{\overset{\eta}{\dashv}} \hom(V, \_)$ mit η wie oben und $\varepsilon_W : \hom(V, W) \otimes V \longrightarrow W,\ f \otimes v \mapsto f(v)$.

5.2 Adjungierte und (Co-)Limiten

Zunächst betrachten wir eine Möglichkeit, das Konzept der (Co-)Limiten im Rahmen des Konzeptes der universellen Pfeile zu betrachten. Sei $\mathbf{I}$ eine kleine Kategorie und $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ ein Diagramm in einer Kategorie $\mathbf{A}$ (d.h. ein Funktor von $\mathbf{I}$ nach $\mathbf{A}$). Betrachte den *"konstanter Funktor"-Funktor*

$$\begin{array}{ccc} C : \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{A}^{\mathbf{I}} \\ A & & C_A \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow{\scriptstyle C_f} \\ A' & & C_{A'} \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{ccc} C_A : \mathbf{I} & \longrightarrow & \mathbf{A} \\ i & & A \\ {\scriptstyle m}\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A} \\ j & & A \end{array}$$

und

$$C_f = (C_{f,A})_{A\in \mathrm{ob}(\mathbf{A})} \quad \text{mit} \quad C_{f,A} = f \text{ für alle } A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A}).$$

Dann gilt nach Definition: $(L, (L \xrightarrow{\lambda_i} D(i))_{i\in\mathrm{ob}(\mathbf{I})})$ ist genau dann ein Limes von D, wenn $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{ob}(\mathbf{I})} =: \lambda : C_L \longrightarrow D$ eine natürliche Transformation mit der folgenden universellen

Eigenschaft ist:

$$\begin{tikzcd} D & C_L \arrow[l, "\lambda"'] & & L \\ & C_K \arrow[ul, "\forall\ \mu"] \arrow[u, "C_f"'] & & K \arrow[u, dashed, "\exists!\ f"'] \end{tikzcd}$$

Damit gilt:

$$(L, (\lambda_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})}) \text{ ist Limes von } D \iff (L, \lambda) \text{ ist } C\text{-co-universeller Pfeil für } D.$$

Analog bzw. dual dazu ist $((D(i) \xrightarrow{\kappa_i} C)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})}, C)$ genau dann ein Colimes von D, wenn $(\kappa_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})} =: \kappa : D \longrightarrow C_C$ eine natürliche Transformation mit der folgenden universellen Eigenschaft ist:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\forall\ \beta"'] & C_C \arrow[d, "C_g"] & & C \arrow[d, dashed, "\exists!\ g"] \\ & C_B & & B \end{tikzcd}$$

Damit gilt entsprechend:

$$((\kappa_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})}, C) \text{ ist Colimes von } D \iff (\kappa, C) \text{ ist } C\text{-universeller Pfeil für } D.$$

Somit ist eine Kategorie $\mathbf{A}$ vollständig (bzw. covollständig), wenn der "konstanter Funktor"-Funktor $C : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{I}}$ einen Rechtsadjungierten (bzw. Linksadjungierten) besitzt.

Theorem 5.2.1 Hat der Funktor $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ einen Linksadjungierten $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, so bewahrt G Limiten (d.h. Rechtsadjungierte bewahren Limiten).

Beweis: Es gelte $F \underset{\varepsilon}{\overset{\eta}{\dashv}} G$ und $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ sei ein Diagramm mit Limes (L, λ). Dann ist $G\lambda : GC_L \longrightarrow GD$ eine natürliche Transformation, wobei $GC_L = C_{GL}$ gilt. Ist nun auch $\mu : C_B \longrightarrow GD$ natürlich, $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$, so kommutiert für alle $\mathbf{I}$-Morphismen $i \xrightarrow{m} j$ das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[ddr, "\mu_j"'] & GFB \arrow[d, "G\bar{\mu}_i"] \arrow[dd, bend left=60, "G\bar{\mu}_j"] & & FB \arrow[d, dashed, "\exists!\ \bar{\mu}_i"'] \arrow[dd, dashed, bend left=60, "\exists!\ \bar{\mu}_j"] \\ & GD(i) \arrow[d, "GDm"] & & D(i) \arrow[d, "Dm"] \\ & GD(j) & & D(j) \end{tikzcd}$$

d.h. es gilt $Dm \cdot \bar{\mu}_i = \bar{\mu}_j$ und somit existiert eine natürliche Transformation $\bar{\mu} : C_{FB} \longrightarrow D$ mit $G\bar{\mu} \cdot \eta = \mu$. Da (L, λ) Limes von D ist, folgt

$$\begin{tikzcd} D & C_L \arrow[l, "\lambda"'] & & L \\ & C_{FB} \arrow[ul, "\bar{\mu}"] \arrow[u, "C_{\bar{f}}"'] & & FB \arrow[u, dashed, "\exists!\ \bar{f}"] \end{tikzcd} \tag{$\dagger$}$$

Setze $f := G\bar{f} \cdot \eta_B$, dann kommutiert für alle **I**-Objekte i das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, dashed, "f"'] \arrow[ddr, bend right, "\mu_i"'] & GFB \arrow[d, "G\bar{f}"] \arrow[dd, bend left=60, "G\bar{\mu}_i"] \\
 & GL \arrow[d, "G\lambda_i"] \\
 & GD(i)
\end{tikzcd}$$

d.h. es gilt $G\lambda \cdot C_f = \mu$. Ist $g : B \longrightarrow GL$ auch ein **B**-Morphismus mit $G\lambda \cdot C_g = \mu$, dann gibt es aufgrund der Adjunktion genau einen **A**-Morphismus $\bar{g} : FB \longrightarrow L$ mit $G\bar{g} \cdot \eta_B = g$. Damit folgt für alle **I**-Objekte i:

$$G\lambda_i \cdot G\bar{g} \cdot \eta_B = G\lambda_i \cdot g = \mu_i = G\bar{\mu}_i \cdot \eta_B,$$

d.h. es folgt $\lambda \cdot C_{\bar{g}} = \bar{\mu}$. Nach (†) ist dann $\bar{g} = \bar{f}$, also auch $g = f$. Damit ist insgesamt $(GL, G\lambda)$ Limes von GD. ✓

Theorem 5.2.2 Ist $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ ein Funktor, der einen Rechtsadjungierten $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ hat, so bewahrt F Colimiten (d.h. Linksadjungierte bewahren Colimiten).

Beweis: Sei $F \underset{\varepsilon}{\overset{\eta}{\dashv}} G$ und $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{B}$ mit Colimes (κ, C). Dann gilt $G^{\mathrm{op}} \underset{\eta^{\mathrm{op}}}{\overset{\varepsilon^{\mathrm{op}}}{\dashv}} F^{\mathrm{op}}$ nach 5.1.7 und $D^{\mathrm{op}} : \mathbf{I}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{B}^{\mathrm{op}}$ ist ein Diagramm mit Limes $(C, \kappa^{\mathrm{op}})$. Nach 5.2.1 bewahrt F^{op} Limiten, d.h. $(F^{\mathrm{op}}C, F^{\mathrm{op}}\kappa^{\mathrm{op}}) = (FC, (F\kappa)^{\mathrm{op}})$ ist Limes von $F^{\mathrm{op}}D^{\mathrm{op}} = (FD)^{\mathrm{op}}$. Dann ist aber auch $(F\kappa, FC)$ Colimes von FD. ✓

5.3 Existenz von Adjunktionen

Für einen mengenwertigen Funktor $U : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$, der einen Adjungierten $F \dashv U$ hat, sind die "freien Objekte" FM über einer Menge M durch die Copotenzen in **A** und das freie Objekt über der Einermenge $F\{\emptyset\}$ bestimmt: Wegen $M \cong \coprod_{m \in M} \{\emptyset\}$ in **Set** und 5.2.2 gilt $FM = \coprod_{m \in M} F\{\emptyset\}$. Hat die Kategorie **A** beliebige Copotenzen, so lässt sich sogar zeigen, dass U einen Linksadjungierten hat, falls es einen U-universellen Pfeil für $\{\emptyset\}$ gibt. Der Beweis benutzt wieder die Darstellung $M \cong \coprod_{m \in M} \{\emptyset\}$, eine spezielle Eigenschaft der Kategorie **Set**. Im folgenden Abschnitt werden Existenzsätze für Adjunktionen vorgestellt, die unabhängig von besonderen Eigenschaften beteiligter Kategorien sind.

Definition 5.3.1 Sei $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor und $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$. Dann heißt die Familie von Paaren

$$(A_i, B \xrightarrow{u_i} GA_i)_{i \in I}$$

mit $A_i \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$, $u_i \in \mathrm{mor}(\mathbf{B})$ (und I eine Menge) *G-Lösungsmenge* von B, falls zu jedem **B**-Morphismus $f : B \longrightarrow GA$ ein $i \in I$ und ein $\bar{f} : A_i \longrightarrow A$ existieren, so dass

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "f"'] & GA_i \arrow[d, dashed, "G\bar{f}"] \\
 & GA
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Der erste Existenzsatz ist "Freyd´s General Adjoint Functor Theorem":

Theorem 5.3.2 (GAFT) Sei $\mathbf{A}$ eine vollständige Kategorie, $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor. Dann hat G genau dann einen Linksadjungierten, wenn gilt

(1) G bewahrt Limiten; und

(2) jedes $\mathbf{B}$-Objekt hat eine G-Lösungsmenge ("solution set condition").

Beweis: "$\Rightarrow$": Klar, denn nach 5.2.1 gilt (1) und nach 5.1.5 ist $(FB, B \xrightarrow{\eta_B} GFB)$ für jedes $\mathbf{B}$-Objekt B ein G-universeller Pfeil, also insbesondere eine (einelementige) G-Lösungsmenge.

"$\Leftarrow$": Sei $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$, zu zeigen: Es gibt einen G-universellen Pfeil $(A_B, B \xrightarrow{u_B} GA_B)$ für B. Nach Voraussetzung gibt es eine G-Lösungsmenge $(A_i, u_i)_{i \in I}$ für B. Betrachte das Produkt

$$(P := \prod_{j \in I} A_j, (P \xrightarrow{\pi_i} A_i)_{i \in I}).$$

Da G nach Voraussetzung Produkte bewahrt, induziert das Produkt $(GP = \prod GA_i, (G\pi_i)_{i \in I})$ einen eindeutig bestimmten $\mathbf{B}$-Morphismus v mit:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, dashed, "v"'] & GA_i \\ & GP \arrow[u, "G\pi_i"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert für alle $i \in I$. Setze nun

$$J := \{k : P \longrightarrow P \mid Gk \cdot v = v\}, \quad (A_B, e) := \mathrm{Eq}(k)_{k \in J},$$

d.h. (A_B, e) ist der "multiple" Egalisator aller Morphismen aus J:

$$\begin{tikzcd} A_B \arrow[r, "e"] & P \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[r, bend right, "k'"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & P. \end{tikzcd}$$

Dann ist $(GA_B, Ge) \approx \mathrm{Eq}(Gk)_{k \in J}$, denn nach Voraussetzung bewahrt G auch Egalisatoren. Nach Definition gilt $Gk \cdot v = v$ für alle $k \in J$, daher existiert genau ein $\mathbf{B}$-Morphismus u_B, so dass

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, dashed, "u_B"] \arrow[dr, "v"'] & GA_B \arrow[d, "Ge"] \\ & GP \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann ist (A_B, u_B) ein G-universeller Pfeil:

Existenz: Sei dazu $f : B \longrightarrow GA$. Da $(A_i, u_i)_{i \in I}$ eine G-Lösungsmenge für B ist, existiert ein $i \in I$ und ein $\bar{f} : A_i \longrightarrow A$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u_B"] \arrow[dr, "v"] \arrow[ddr, "u_i"] \arrow[dddr, "f"'] & GA_B \arrow[d, "Ge"] \\
& GP \arrow[d, "G\pi_i"] \\
& GA_i \arrow[d, dashed, "G\bar{f}"] \\
& GA
\end{tikzcd}$$

Setze $\tilde{f} := \bar{f} \cdot \pi_i \cdot e$, dann gilt $G\tilde{f} \cdot u_B = f$.

Eindeutigkeit: Seien r, s Morphismen mit $Gr \cdot u_B = Gs \cdot u_B = f$. Setze $(E, d) := \mathrm{Eq}(r, s)$:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "d"] & A_B \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[r, shift right, "s"'] & A
\end{tikzcd} ,$$

dann gilt auch $(GE, Gd) \approx \mathrm{Eq}(Gr, Gs)$ und somit faktorisiert u_B eindeutig über GE:

$$\begin{tikzcd}
GE \arrow[rr, "Gd"] & & GA_B \arrow[r, shift left, "Gr"] \arrow[r, shift right, "Gs"'] & GA \\
& B \arrow[ul, dashed, "\exists!\ h"] \arrow[ur, "u_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Zu diesem Morphismus h existiert wieder ein $i \in I$ und ein $\bar{h} : A_i \longrightarrow E$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& & GP \arrow[dl, "G\pi_i"'] \arrow[dd, "G(\bar{h}\pi_i) =: G\tilde{h}"] \\
& GA_i \arrow[dr, dashed, "G\bar{h}"] & \\
B \arrow[uurr, bend left, "v"] \arrow[ur, "u_i"] \arrow[rr, "h"] \arrow[drr, "u_B"] \arrow[ddrr, bend right, "v"'] & & GE \arrow[d, "Gd"] \\
& & GA_B \arrow[d, "Ge"] \\
& & GP
\end{tikzcd}$$

Mit $\tilde{h} := \bar{h} \cdot \pi_i$ ist also $e \cdot d \cdot \tilde{h} \in J$. Offenbar ist auch $\mathrm{id}_P \in J$, nach Definition von e gilt daher

$$e \cdot (d \cdot \tilde{h} \cdot e) = (e \cdot d \cdot \tilde{h}) \cdot e = \mathrm{id}_P \cdot e = e \cdot \mathrm{id}_{A_B},$$

also $d \cdot (\tilde{h} \cdot e) = \mathrm{id}_{A_B}$, da e ein Monomorphismus (Egalisator!) ist. Somit ist d ein Monomorphismus (Egalisator!) und eine Retraktion, d.h. ein Isomorphismus, woraus $r = s$ folgt. ✓

Definition 5.3.3 Sei $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor und $g : B \longrightarrow GA$ ein $\mathbf{B}$-Morphismus. Dann heißt g *extrem G-erzeugender* Morphismus, falls gilt

(1) $Gr \cdot g = Gs \cdot g \quad \Longrightarrow \quad r = s$;

(2) $g = Gm \cdot f$ mit m Monomorphismus $\quad \Longrightarrow \quad m$ Isomorphismus.

Dann heißt A auch *extrem G-erzeugt von B*.

Mit diesem Begriff lässt sich zunächst eine "Vorstufe" eines weiteren Existenzsatzes formulieren. Man möchte schrittweise die "solution set condition" loswerden, um unter geeigneten Voraussetzungen beweisen zu können, dass ein Funktor genau dann einen Adjungierten hat, wenn er Limiten bewahrt.

Theorem 5.3.4 Die Kategorie $\mathbf{A}$ sei well-powered und vollständig und der Funktor $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ bewahre Limiten. Jedes $\mathbf{B}$-Objekt B extrem G-erzeuge zudem höchstens eine Menge paarweise nicht-isomorpher $\mathbf{A}$-Objekte. Dann hat G einen Linksadjungierten $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$.

Beweis: (i) Zeige: Jedes $f : B \longrightarrow GA$ hat eine Zerlegung $f : B \xrightarrow{g} G\overline{A} \xrightarrow{Gm} GA$ (mit g extrem G-erzeugend und m ein Monomorphismus). Sei dazu $\mathcal{S}$ die Klasse aller Unterobjekte (D, d) von A mit

$$B \xrightarrow{f} GA \;=\; B \xrightarrow{\exists\, h} GD \xrightarrow{Gd} GA.$$

Wähle aus $\mathcal{S}$ ein Repräsentantensystem von Unterobjekten (bzgl. der Relation $\approx$ auf den Unterobjekten von A) $(D_i, d_i)_{i \in I}$, das mit einer Menge I indiziert ist. Das geht, da $\mathbf{A}$ well-powered ist. Bilde dann den multiplen Pullback

$$\begin{tikzcd}
 & D_i \arrow[dr, "d_i"] & \\
\overline{A} \arrow[ur, "k_i"] \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "k_j"'] & & A \\
 & D_j \arrow[ur, "d_j"'] &
\end{tikzcd} \qquad \forall\, i, j \in I.$$

Nach Konstruktion ist m ein Monomorphismus. Nach Voraussetzung ist auch $(G\overline{A}, (Gk_i)_{i \in I})$ multipler Pullback von $(GD_i, Gd_i)_{i \in I}$. Daher erhalten wir für alle $i \in I$ ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h_i"] \arrow[ddr, dashed, "\exists!\, g"'] & & GA \\
 & GD_i \arrow[ur, "Gd_i"'] & \\
 & G\overline{A} \arrow[u, "Gk_i"'] \arrow[uur, bend right, "Gm"'] &
\end{tikzcd}$$

denn zu (D_i, d_i) existiert h_i mit $Gd_i \cdot h_i = f$, d.h. die Quelle der h_i erfüllt auch $Gd_j \cdot h_j = Gd_i \cdot h_i$ für alle $i, j \in I$.

(ii) Zeige: g ist extrem G-erzeugend. Falls gilt

$$B \xrightarrow{g} G\overline{A} \;=\; B \xrightarrow{g'} GA' \xrightarrow{Gh} G\overline{A}$$

mit h Monomorphismus, so ist nach obigem Diagramm $(A', m \cdot h) \in \mathcal{S}$, denn m ist ein Monomorphismus nach Konstruktion, damit auch $m \cdot h$ und es gilt $G(m \cdot h) \cdot g' = Gm \cdot g = f$. Also gibt es ohne Einschränkung $j \in I$ mit $(D_j, d_j) \in \mathcal{S}$ und $m \cdot h = d_j$. Damit folgt

$$m \cdot h \cdot k_j = d_j \cdot k_j = m = m \cdot \mathrm{id}_{\overline{A}},$$

also $h \cdot k_j = \mathrm{id}_{\overline{A}}$, d.h. h ist ein Isomorphismus. Sei schließlich $Gr \cdot g = Gs \cdot g$ für passende Morphismen r, s und $(E, e) := \mathrm{Eq}(r, s)$. Dann ist nach Voraussetzung $(GE, Ge) \approx \mathrm{Eq}(Gr, Gs)$ und es existiert ein eindeutig bestimmtes $\tilde{g} : B \longrightarrow GE$ mit $Ge \cdot \tilde{g} = g$. Da e ein Egalisator ist, ist e auch ein Monomorphismus, nach obigem und $Ge \cdot \tilde{g} = g$ also ein Isomorphismus, d.h. es gilt $r = s$.

(iii) Betrachte die Menge

$$\{(\overline{A}, B \xrightarrow{g} G\overline{A}) \mid g \text{ extrem } G\text{-erzeugend}\}.$$

Nach Voraussetzung gibt es so eine Menge, nach (i) und (ii) ist das sogar eine G-Lösungsmenge für B. Damit hat G nach 5.3.2 einen Linksadjungierten. ✓

Damit lässt sich nun der angekündigte Existenzsatz beweisen, das so genannte “Special Adjoint Functor Theorem”:

Theorem 5.3.5 (SAFT) Sei $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ein Funktor, $\mathbf{A}$ well-powered, vollständig und mit einem Cogenerator $C \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$. Dann sind äquivalent:

(1) G hat einen Linksadjungierten;

(2) G bewahrt Limiten.

Beweis: Wegen 5.2.1 bleibt “(2) ⇒ (1)” zu zeigen. Sei $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$. Betrachte die Klasse $\mathcal{R}$ der paarweise nicht-isomorphen $\mathbf{A}$-Objekte, die extrem G-erzeugt werden durch ein $g_A : B \longrightarrow GA$. Wir zeigen, dass $\mathcal{R}$ eine Menge ist, d.h. das die Voraussetzungen von 5.3.4 erfüllt sind. Da C ein Cogenerator ist, ist für $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ der induzierte Morphismus $h_A : A \longrightarrow C^{\mathbf{A}(A,C)}$, definiert durch

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "h_A"] \arrow[dr, "f"'] & C^{\mathbf{A}(A,C)} \arrow[d, "\pi_f"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \text{für alle } f \in \mathbf{A}(A, C),$$

ein Monomorphismus (falls $h_A \cdot r = h_A \cdot s$ gilt für geeignete r, s, so gilt auch $f \cdot r = f \cdot s$ für alle $f : A \longrightarrow C$, was $r = s$ zur Folge hat, da C Cogenerator ist). Da die Morphismen g_A für $A \in \mathcal{R}$ extrem G-erzeugend sind, ist die Abbildung

$$\begin{aligned} r_A : \mathbf{A}(A, C) &\longrightarrow \mathbf{B}(B, GC) \\ f &\longmapsto Gf \cdot g_A \end{aligned}$$

für jedes $A \in \mathcal{R}$ injektiv.

1. Fall: $\mathbf{A}(A,C) \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Umkehrabbildung s_A mit $s_A \cdot r_A = \mathrm{id}_{\mathbf{A}(A,C)}$. Die universelle Eigenschaft der Produkte induziert dann Morphismen

$$\begin{tikzcd} C^{\mathbf{B}(B,GC)} \arrow[r, shift left, "R_A"] & C^{\mathbf{A}(A,C)} \arrow[l, shift left, "S_A"] \end{tikzcd} \qquad \text{mit } R_A \cdot S_A = \mathrm{id}_{C^{\mathbf{A}(A,C)}},$$

definiert durch:

$$\begin{tikzcd} C^{\mathbf{B}(B,GC)} \arrow[r, dashed, "R_A"] \arrow[dr, "\pi_{r_A(f)}"'] & C^{\mathbf{A}(A,C)} \arrow[d, "\pi_f"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} C^{\mathbf{A}(A,C)} \arrow[r, dashed, "S_A"] \arrow[dr, "\pi_{s_A(g)}"'] & C^{\mathbf{B}(B,GC)} \arrow[d, "\pi_g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Aus $\pi_f \cdot (R_A \cdot S_A) = \pi_{r_A(f)} \cdot S_A = \pi_{s_A(r_A(f))} = \pi_f$ für alle $f \in \mathbf{A}(A,C)$ folgt dann obige Gleichung. Insbesondere ist

$$A \xrightarrow{S_A \cdot h_A} C^{\mathbf{B}(B,GC)}$$

ein Unterobjekt für alle A mit $\mathbf{A}(A,C) \neq \emptyset$.

2. Fall: $\mathbf{A}(A,C) = \emptyset$. Dann ist $C^{\mathbf{A}(A,C)} = C^{\emptyset} =: T$ ein terminales $\mathbf{A}$-Objekt. Insbesondere ist $A \xrightarrow{h_A} T$ ein Unterobjekt für alle A mit $\mathbf{A}(A,C) = \emptyset$.

Insgesamt ist jedes $A \in \mathcal{R}$ entweder Unterobjekt von $C^{\mathbf{B}(B,GC)}$ oder von T. Von beiden gibt es bis auf Isomorphie nur eine Menge, d.h. $\mathcal{R}$ ist auch eine Menge. ✓

Kapitel 6

Faktorisierungsstrukturen

Ein wichtiges kategorielles Hilfsmittel sind Faktorisierungen von Morphismen bzw. von Quellen und Senken. Dabei besteht eine enge Analogie zu den bekannten Faktorisierungen von Abbildungen oder Homomorphismen, was einen intuitiven Zugang ermöglicht. Das Thema Faktorisierungsstrukturen allein würde den Rahmen dieses Skriptes bei weitem sprengen. Dieses letzte Kapitel soll daher nur eine kurze Einführung bzw. einen Ausblick geben und exemplarisch einige Beweistechniken vorstellen. Entgegen der historischen Entwicklung beginnen wir daher auch mit Faktorisierungsstrukturen für Quellen und verzichten auf die explizite Behandlung der Faktorisierungsstrukturen für Morphismen.

Für eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$, d.h. einen Morphismus in **Set**, existiert stets eine so genannte "Faktorisierung übers Bild":

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"'] & & B \\ & f[A] \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

Dabei ist e die Nachbeschränkung von f auf dessen Bild und m die Inklusion des Bildes in B. Offenbar ist dann e surjektiv, d.h. ein *regulärer Epimorphismus* in **Set**, und m injektiv, also ein *Monomorphismus* in **Set**. Dies ist ein Beispiel für eine (RegEpi,Mono)-Faktorisierung eines Morphismus in **Set**. Es stellt sich die Frage, ob sich eine Verallgemeinerung auf beliebige Kategorien und dann auf Quellen bzw. Senken finden lässt.

6.1 Faktorisierungsstrukturen für Quellen

Im folgenden betrachten wir Quellen $\mathcal{S} = (A, (A \xrightarrow{f_i} A_i)_{i \in I})$, wobei I eine Klasse sein darf. Für eine solche Quelle mit *Quellobjekt* A und einen Morphismus $B \xrightarrow{h} A$ kann man dann die Quelle

$$\mathcal{S} \cdot h := (B, (B \xrightarrow{f_i \cdot h} A_i)_{i \in I})$$

bilden. Jeder Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ kann natürlich als Quelle $(A, (A \xrightarrow{f} B))$ bzw. als Senke $((A \xrightarrow{f} B), B)$ aufgefasst werden und umgekehrt. Für eine Kategorie bezeichnen wir spezielle

Morphismenklassen wie etwa Isomorphismen, (reguläre oder extremale) Epimorphismen, etc. entsprechend mit

$$\mathrm{Epi},\ \mathrm{Mono},\ \mathrm{Iso},\ \mathrm{RegEpi},\ \mathrm{RegMono},\ \mathrm{ExtrEpi},\ \mathrm{ExtrMono}, \ldots \mathrm{etc.}$$

und im Falle einer Verwechslungsgefahr mit $\mathrm{Epi}(\mathbf{A}), \ldots$ etc..

Definition 6.1.1 Sei E eine Klasse von Morphismen und $\mathbb{M}$ eine Kollektion von Quellen in einer Kategorie $\mathbf{A}$. Dann heißt $(E, \mathbb{M})$ *Faktorisierungsstruktur* (im folgenden kurz *FS*) auf $\mathbf{A}$, falls gilt:

(1) E und $\mathbb{M}$ sind abgeschlossen unter der Komposition mit Isomorphismen, d.h.

- falls $e \in E$ und $h \in \mathrm{Iso}$, so dass $h \cdot e$ definiert ist, dann ist auch $h \cdot e \in E$;
- falls $\mathcal{S} \in \mathbb{M}$ und $h \in \mathrm{Iso}$, so dass $\mathcal{S} \cdot h$ definiert ist, dann ist auch $\mathcal{S} \cdot h \in \mathbb{M}$.

(2) $\mathbf{A}$ hat $(E, \mathbb{M})$-*Faktorisierungen (von Quellen)*, d.h. jede Quelle $\mathcal{S}$ in $\mathbf{A}$ hat eine Faktorisierung $\mathcal{S} = \mathcal{M} \cdot e$ mit $\mathcal{M} \in \mathbb{M}$ und $e \in E$.

(3) $\mathbf{A}$ hat die *(eindeutige)* $(E, \mathbb{M})$-*Diagonal-Eigenschaft*: Sind $A \xrightarrow{e} B, A \xrightarrow{f} C$ Morphismen mit $e \in E$ und $\mathcal{S} = (B, (B \xrightarrow{g_i} D_i)_{i \in I}), \mathcal{M} = (C, (C \xrightarrow{m_i} D_i)_{i \in I})$ Quellen mit $\mathcal{M} \in \mathbb{M}$, so dass

$$\mathcal{M} \cdot f = \mathcal{S} \cdot e$$

gilt, dann existiert eine (eindeutig bestimmte) *Diagonale* $B \xrightarrow{d} C$, die für jedes $i \in I$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g_i"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ C \arrow[r, "m_i"'] & D_i \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. $\mathbf{A}$ heißt dann auch $(E, \mathbb{M})$-*Kategorie*.

Bemerkung 6.1.2 (i) Als Kurzschreibweise werden wir auf die explizite Beschreibung von Quellen und Senken verzichten. D.h. die Gleichung

$$\mathcal{M} \cdot f = \mathcal{S} \cdot e$$

für Quellen $\mathcal{M}, \mathcal{S}$ und Morphismen f, e bedeutet, dass $\mathcal{M}$ und $\mathcal{S}$ über dieselbe Klasse I indiziert sind, alle möglichen Kompositionen definiert sind und übereinstimmen (insbesondere, dass das jeweilige Quellobjekt mit dem jeweiligen Zielobjekt des Morphismus übereinstimmt), also auch das i-te Zielobjekt von $\mathcal{M}$ mit dem i-ten Zielobjekt von $\mathcal{S}$ übereinstimmt. Dies lässt sich kurz ausdrücken, in dem man sagt, das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "\mathcal{S}"] \\ \bullet \arrow[r, "\mathcal{M}"'] & {} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Entsprechendes gilt natürlich auch für Senken. Auch die Existenz einer Diagonale im Sinne der Definition kürzen wir durch

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "\mathcal{S}"] \arrow[dl, dashed, "\exists\, d"'] \\ \bullet \arrow[r, "\mathcal{M}"'] & {} \end{tikzcd}$$

ab.

(ii) Die Eindeutigkeitsforderung der Diagonale ist redundant, vergleiche Theorem 6.1.4.

(iii) Das duale Konzept lautet: Für eine Kollektion $\mathbb{E}$ von *Senken* in $\mathbf{A}$ und $M \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})$ ist $(\mathbb{E}, M)$ genau dann eine *FS (für Senken)* auf $\mathbf{A}$, wenn gilt:

$(1')$ $(\mathcal{E} \in \mathbb{E}, h \in \mathrm{Iso} \implies h \cdot \mathcal{E} \in \mathbb{E})$ und $(m \in M, h \in \mathrm{Iso} \implies m \cdot h \in M)$.

$(2')$ $\mathcal{S}$ Senke in $\mathbf{A} \Longrightarrow \mathcal{S} = m \cdot \mathcal{E}$ mit $\mathcal{E} \in \mathbb{E}$ und $m \in M$.

$(3')$ Jedes kommutative Quadrat von Senken

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\mathcal{E}"] \arrow[d, "\mathcal{S}"'] & \bullet \arrow[d, "f"] \\ \bullet \arrow[r, "m"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

mit $m \in M$ und $\mathcal{E} \in \mathbb{E}$ hat eine (eindeutige) Diagonale

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\mathcal{E}"] \arrow[d, "\mathcal{S}"'] & \bullet \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\exists\, d"'] \\ \bullet \arrow[r, "m"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

(iv) Ist $(E, \mathbb{M})$ eine FS für Quellen und $M := \mathrm{mor}(\mathbf{A}) \cap \mathbb{M}$ (identifiziere "einelementige Quellen" mit Morphismen), dann ist (E, M) eine *FS für Morphismen*, d.h. es gelten (1) bis (3) in der Definition für Morphismen (mehr dazu findet sich in [8] bzw. [1]).

(v) Es sind auch *leere Quellen* zugelassen: Ist $(E, \mathbb{M})$ eine FS auf $\mathbf{A}$ und

$$\mathbf{A}_{\mathbb{M}} := \{A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A}) \mid (A, \emptyset) \in \mathbb{M}\},$$

so bedeuten (2) und (3) folgendes:

$(2^{\emptyset})$ Für jedes $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ existiert ein $A \xrightarrow{e} B \in E$ mit $B \in \mathbf{A}_{\mathbb{M}}$.

$(3^{\emptyset})$ Für jedes $A \xrightarrow{e} B \in E$ und $A \xrightarrow{f} C$ mit $C \in \mathbf{A}_{\mathbb{M}}$ existiert eindeutiges $B \xrightarrow{d} C$ mit $f = d \cdot e$.

Beispiele 6.1.3 (1) Jede Kategorie $\mathbf{A}$ ist eine (Iso,Source)-Kategorie, wobei 'Source' die Kollektion aller Quellen in $\mathbf{A}$ bezeichne. Dies gibt eine so genannte *triviale FS*.

(2) Jede Kategorie **A** erfüllt die (eindeutige) (RegEpi,MQ)-Diagonal-Eigenschaft, wobei MQ die Kollektion aller Monoquellen in **A** bezeichne und RegEpi die Klasse der *regulären Epimorphismen*, d.h. derjenigen Epimorphismen $A \xrightarrow{e} B$, für die (e, B) der Coegalisator eines Paares von Morphismen $r, s : C \longrightarrow A$ in **A** ist (vergleiche A.6). Gilt nämlich $\mathcal{M} \cdot f = \mathcal{S} \cdot e$ mit einem regulären Epimorphismus e und einer Monoquelle $\mathcal{M}$, so erhält man auch

$$\mathcal{M} \cdot f \cdot r = \mathcal{M} \cdot f \cdot s$$

für das Morphismenpaar (r, s), dessen Coegalisator e ist. Da $\mathcal{M}$ eine Monoquelle ist, folgt $f \cdot r = f \cdot s$ und somit existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus d mit $d \cdot e = f$. Wegen

$$\mathcal{M} \cdot d \cdot e = \mathcal{M} \cdot f = \mathcal{S} \cdot e$$

und e Epimorphismus gilt dann auch $\mathcal{M} \cdot d = \mathcal{S}$ und d ist die gewünschte Diagonale.

(3) In **Set** hat jede Quelle $(A, (A \xrightarrow{f_i} A_i)_{i \in I})$ eine (RegEpi,MQ)-Faktorisierung:

- Setze $a \sim b \;:\Longleftrightarrow\; (f_i(a) = f_i(b)\ \forall i \in I)$, dies gibt eine Äquivalenzrelation auf A.
- Dann faktorisiert jedes f_i über die kanonische Projektion $e : A \longrightarrow A/_{\sim}$ auf die Äquivalenzklassen:

  $$A \xrightarrow{f_i} A_i \;=\; A \xrightarrow{e} A/_{\sim} \xrightarrow{m_i} A_i$$

  Dabei ist m_i die (wohldefinierte!) Fortsetzung von f_i auf die Äquivalenzklassen.
- Natürlich ist e surjektiv und damit ein (regulärer) Epimorphismus in **Set** (vergleiche A.6).
- Nach Konstruktion ist dann $(m_i)_{i \in I}$ eine Monoquelle: Gilt $m_i([a]) = m_i([b])$ für alle $i \in I$, so auch $f_i(a) = f_i(b)$ nach Definition der m_i. Dann ist aber schon $[a] = [b]$ nach Definition von $\sim$.

Mit obigem ist damit **Set** eine (RegEpi,MQ)-Kategorie, da reguläre Epimorphismen und Monoquellen offenbar unter der Komposition mit Isomorphismen abgeschlossen sind.

(4) Sei **A** eine Kategorie der Form **Grp**, **Ring**, **R-Mod**,... etc., d.h. eine konkrete, algebraische Kategorie, in der der wohlbekannte *Homomorphiesatz* gilt. Dann hat die Kategorie **A** (RegEpi,MQ)-Faktorisierungen von Quellen. Dies geht völlig analog zum Fall **Set**:

- Definiere $\sim$ wie oben, dies ist nämlich sogar eine Kongruenz.
- Ist e die kanonische Projektion auf die Äquivalenzklassen, dann hat wegen $\ker(e) \subset \ker(f_i)$ jedes f_i nach dem Homomorphiesatz eine Fortsetzung m_i auf die Äquivalenzklassen. Also faktorisiert $(f_i)_I$ als $(f_i)_I = (m_i)_I \cdot e$, wobei e surjektiv ist, d.h. regulärer Epimorphismus (vgl. A.6).
- $(m_i)_I$ ist eine Monoquelle in **Set** (wie oben), also auch in **A**.

Also ist auch **A** eine (RegEpi,MQ)-Kategorie.

Wie das folgende Theorem zeigt, schränkt die intuitive Herangehensweise bzw. Definition die Wahlfreiheit bezüglich möglicher Morphismenklassen E für $(E, \mathbb{M})$-Kategorien ein. Dies ist nicht weiter verwunderlich, schließlich sollen die $(E, \mathbb{M})$-FS eine kategorielle Verallgemeinerung oder Modellierung der (RegEpi,MQ)-FS sein, wie es sie etwa in **Set**, **Grp**, etc. gibt.

Theorem 6.1.4 Ist $\mathbf{A}$ eine $(E, \mathbb{M})$-Kategorie, so gilt $E \subset \mathrm{Epi}$.

Beweis: Sei $e \in E$ mit $r \cdot e = s \cdot e$ für zwei passende Morphismen r, s. Setze $h_f := r \cdot e$ für jedes $f \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})$. Dann hat die Quelle $(h_f)_{f \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})}$ eine $(E, \mathbb{M})$-Faktorisierung

$$(h_f)_{f \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})} = (m_f)_{f \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})} \cdot \bar{e}.$$

Definiert man

$$g_f = \begin{cases} r & \text{falls } m_f \cdot f = s \\ s & \text{sonst,} \end{cases}$$

so gilt $(m_f) \cdot \bar{e} = (g_f) \cdot e$ und es existiert eine eindeutig bestimmte Diagonale:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\bar{e}"'] & \bullet \arrow[d, "(g_f)"] \arrow[dl, dashed, "\exists\, d"'] \\ \bullet \arrow[r, "(m_f)"'] & {} \end{tikzcd}$$

Insbesondere folgt für $d = f$:

$$m_d \cdot d = g_d = \begin{cases} r & \text{falls } m_d \cdot d = s \\ s & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies geht offenbar nur, wenn $r = s$ gilt. ✓

Allein mit Hilfe dieser Eigenschaft lassen sich eine Reihe weiterer Eigenschaften aus der Diagonal- und der Faktorisierungseigenschaft folgern. Diese fassen wir nun zusammen:

Satz 6.1.5 Eine $(E, \mathbb{M})$-Kategorie $\mathbf{A}$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(1) $(E, \mathbb{M})$-Faktorisierungen sind im wesentlichen eindeutig, d.h. ist $\mathcal{S}$ eine Quelle und sind

$$\mathcal{S} = \mathcal{M} \cdot e = \mathcal{M}' \cdot e'$$

Faktorisierungen mit $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in \mathbb{M}$ und $e, e' \in E$, so existiert ein (eindeutig bestimmter) Isomorphismus h mit

$$\mathcal{M} \cdot h = \mathcal{M}' \quad \text{und} \quad h \cdot e' = e.$$

(2) $E \subset \mathrm{Epi}$ und $\mathbb{M}$ enthält alle extremalen Monoquellen in $\mathbf{A}$.

(3) $E \cap \mathbb{M} = \mathrm{Iso}$.

(4) E und $\mathbb{M}$ sind unter Komposition abgeschlossen.

(5) $f \cdot g \in E$, $g \in \text{Epi} \implies f \in E$.

(6) $f \cdot g \in E$, f Schnitt $\implies g \in E$.

(7) $(\mathcal{S}_i)_I \cdot \mathcal{S} \in \mathbb{M} \implies \mathcal{S} \in \mathbb{M}$.

(8) Ist $\mathcal{S}'$ eine Teilquelle von $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{S}' \in \mathbb{M}$, so ist auch $\mathcal{S} \in \mathbb{M}$.

(9) E und $\mathbb{M}$ bestimmen sich gegenseitig:

   (a) $\mathcal{S} \in \mathbb{M} \iff (\mathcal{S} = \mathcal{S}' \cdot e,\ e \in E \implies e \in \text{Iso})$.

   (b) Besteht $\mathbb{M}$ nur aus Monoquellen, so gilt:

$$f \in E \iff (f = m \cdot g,\ m \in \mathbb{M} \implies m \in \text{Iso}).$$

Beweis: zu (1)-(3): Übungsaufgabe, vergleiche A.6. Für die restlichen Aussagen ist folgendes Lemma sehr nützlich:

Lemma Sei $\mathbf{A}$ eine $(E, \mathbb{M})$-Kategorie, $e \in E$ und $m \in \mathbb{M} \cap \text{mor}(\mathbf{A})$. Falls es Morphismen d und f gibt, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & \bullet \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "d"'] \\
\bullet \arrow[r, "m"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

kommutiert, so ist m ein Isomorphismus und $f \in E$.

Beweis des Lemmas: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & \bullet \arrow[d, "m"] \arrow[dl, "x"'] \\
\bullet \arrow[r, "m"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

kommutiert für $x = \text{id}$ und $x = d \cdot m$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Diagonale ist damit $d \cdot m = \text{id}$, nach Voraussetzung aber auch $m \cdot d = \text{id}$. Daher ist $m \in \text{Iso}$ und $f = m \cdot e \in E$. ✓

zu (4): Seien zunächst $e_1, e_2 \in E$, so dass $e_2 \cdot e_1$ in $\mathbf{A}$ definiert ist. Dann hat nach Voraussetzung der Morphismus $e_2 \cdot e_1$ (als Quelle betrachtet) eine Faktorisierung $e_2 \cdot e_1 = m \cdot e$ mit $e \in E$ und $m \in \mathbb{M}$. Damit existiert dann eine Diagonale

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e"'] & \bullet \arrow[d, "e_2"] \arrow[dl, dashed, "\exists\, d"'] \\
\bullet \arrow[r, "m"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

denn $e_1 \in E$ und $m \in \mathbb{M}$. Da auch $e_2 \in E$ ist, liefert das folgende Diagramm eine weitere Diagonale:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, "d"'] & \bullet \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, dashed, "\exists d'"'] \\
\bullet \arrow[r, "m"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Damit kommutiert auch

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "e_2 \cdot e_1"] \arrow[d, "e"'] & \bullet \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "d'"'] \\
\bullet \arrow[r, "m"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

d.h. nach dem Lemma ist $e_2 \cdot e_1 \in E$. Seien nun $\mathcal{M}_i, \mathcal{M} \in \mathbb{M}$, $i \in I$, mit $(\mathcal{M}_i)_I \cdot \mathcal{M}$ definiert, d.h. das Quellobjekt von $\mathcal{M}_i$ ist das i-te Zielobjekt von $\mathcal{M}$ und jedes $\mathcal{M}_i$ sei über J_i indiziert. Dann existiert eine Faktorisierung

$$(\mathcal{M}_i)_I \cdot \mathcal{M} = \mathcal{N} \cdot e$$

mit $\mathcal{N} \in \mathbb{M}$ und $e \in E$. Bezeichnet m_i, $i \in I$, die Morphismen in $\mathcal{M}$ und n_{ij}, $i \in I, j \in J_i$, die Morphismen in $\mathcal{N}$, so existiert Aufgrund von $e \in E$ und $\mathcal{M}_i \in \mathbb{M}$ für $i \in I$ eine Diagonale d_i, so dass

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "m_i"'] & \bullet \arrow[d, "(n_{ij})_{J_i}"] \arrow[dl, dashed, "d_i"'] \\
\bullet \arrow[r, "\mathcal{M}_i"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Wegen $d_i \cdot e = m_i$ induziert die Quelle $(d_i)_I$ eine weitere Diagonale d, mit der das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \bullet \arrow[d, "(d_i)_I"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\
\bullet \arrow[r, "\mathcal{M}"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Damit ist e ein Schnitt, wegen $e \in E$ nach Theorem 6.1.4 auch Epimorphismus, also ein Isomorphismus. Somit ist $(\mathcal{M}_i)_I \cdot \mathcal{M} = \mathcal{N} \cdot e \in \mathbb{M}$.

zu (5): Sei $f \cdot g \in E$ mit einem Epimorphismus g. Dann gibt es nach Voraussetzung $m \in \mathbb{M}$, $e \in E$ mit $f = m \cdot e$. Wegen $f \cdot g \in E$ existiert eine Diagonale, so dass

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f \cdot g"] \arrow[d, "e \cdot g"'] & \bullet \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\
\bullet \arrow[r, "m"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Da g ein Epimorphismus ist, kommutiert auch

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & \bullet \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "d"'] \\
\bullet \arrow[r, "m"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

und nach dem Lemma ist $f \in E$.

zu (6): Sei $f \cdot g \in E$ mit einem Schnitt f, d.h. es gibt ein s mit $s \cdot f = \mathrm{id}$. Die $(E, \mathbb{M})$-Faktorisierung $g = m \cdot e$ liefert wieder eine Diagonale:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f \cdot g"] \arrow[d, "e"'] & \bullet \arrow[d, "s"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ \bullet \arrow[r, "m"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

d.h. es kommutiert auch

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "e"'] & \bullet \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "d \cdot f"'] \\ \bullet \arrow[r, "m"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

und nach dem Lemma ist $g \in E$.

zu (7): Faktorisiere $\mathcal{S} = \mathcal{M} \cdot e$ mit $\mathcal{M} \in \mathbb{M}$ und $e \in E$ und erhalte eine Diagonale

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \bullet \arrow[d, "(\mathcal{S}_i)_I \cdot \mathcal{M}"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ \bullet \arrow[r, "(\mathcal{S}_i)_I \cdot \mathcal{S}"'] & {} \end{tikzcd}$$

so dass e ein Schnitt ist und mit 6.1.4 ein Isomorphismus, d.h. $\mathcal{S} \in \mathbb{M}$.

zu (8): Folgt direkt aus (9a).

zu (9a): Sei $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \cdot e \in \mathbb{M}$ mit $e \in E$, dann ist nach (7) $e \in \mathbb{M}$, also nach (3) $e \in \mathrm{Iso}$. Gilt umgekehrt für eine Quelle $\mathcal{S}$ die Implikation, so folgt sofort mit der $(E, \mathbb{M})$-Faktorisierung $\mathcal{S} = \mathcal{M} \cdot e$, dass $e \in \mathrm{Iso}$ ist und damit $\mathcal{S} \in \mathbb{M}$.

zu (9b): Sei $f = m \cdot g \in E$ mit $m \in \mathbb{M}$, also insbesondere m ein Monomorphismus. Die $(E, \mathbb{M})$-Faktorisierung $g = m' \cdot e$ liefert nach (4) zwei $(E, \mathbb{M})$-Faktorisierungen von f:

$$\mathrm{id} \cdot f = f = m \cdot g = (m \cdot m') \cdot e.$$

Nach (1) existiert dann ein Isomorphismus h mit $(m \cdot m') \cdot h = \mathrm{id}$, also ist m auch eine Retraktion, also $m \in \mathrm{Iso}$. Ist umgekehrt für ein f die Implikation gültig, so faktorisiere $f = m \cdot e$ mit $m \in \mathbb{M}$ und $e \in E$, dann ist m ein Isomorphismus und $f \in E$. ✓

6.2 Spezielle Faktorisierungsstrukturen

Die bisherigen Kapitel und Abschnitte decken den Inhalt der Vorlesung, die als Grundlage dieses Skriptes diente, vollständig ab. Die restlichen Abschnitte sollen daher nur einen kleinen Ausblick geben bzw. einige weitere Aspekte der Theorie der Faktorisierungsstrukturen erwähnen. Ein Gesamtüberblick dazu ist in [1] zu finden. Im folgenden wird daher auf Beweise verzichtet und dementsprechend nur zitiert.

Für spezielle Faktorisierungsstrukturen, die häufig auftreten, lassen sich weitere interessante Eigenschaften finden.

Satz 6.2.1 ([1],(15.6)) Ist $\mathbf{A}$ eine $(\mathrm{RegEpi}, \mathbb{M})$-Kategorie, dann enthält $\mathbb{M}$ alle Monoquellen aus $\mathbf{A}$.

Im Falle von E = RegEpi sind also nicht nur die extremalen Monoquellen (vgl. 6.1.5), sondern alle Monoquellen in $\mathbb{M}$ enthalten. Da jede Kategorie die (RegEpi,MQ)-Diagonal-Eigenschaft hat, unterscheiden sich Kategorien von (RegEpi,MQ)-Kategorien nur hinsichtlich der Existenz von (RegEpi,MQ)-Faktorisierungen. Erstaunlicherweise kommen bei der Betrachtung $\mathbb{M}$ = MQ Coegalisatoren ins Spiel:

Satz 6.2.2 ([1],(15.7)) Für eine $(E, \mathbb{M})$-Kategorie $\mathbf{A}$ sind äquivalent:

(1) Jede Quelle in $\mathbb{M}$ ist eine Monoquelle.

(2) $\mathbf{A}$ hat Coegalisatoren und RegEpi $\subset E$.

Somit ist die Existenz von Coegalisatoren eine notwendige Bedingung in (RegEpi,MQ)-Kategorien. Dass diese auch hinreichend sein kann, um $\mathbb{M}$ exakt festzulegen, zeigt der folgende Satz, welcher die Eigenschaften von $(E, \mathbb{M})$-Kategorien hinsichtlich spezieller Klassen E und Quellen $\mathbb{M}$ zusammenfasst:

Satz 6.2.3 ([1],(15.8)) Für $(E, \mathbb{M})$-Kategorien gilt

(1) Ist $\mathbb{M}$ = MQ, dann ist E = ExtrEpi.

(2) Ist $\mathbb{M}$ = ExtrMQ, dann ist E = Epi.

(3) Für E = Epi sind äquivalent:

  (a) $\mathbb{M}$ = ExtrMQ.
  (b) $\mathbf{A}$ hat Coegalisatoren.

(4) Für E = ExtrEpi oder E = RegEpi sind äquivalent:

  (a) $\mathbb{M}$ = MQ.
  (b) $\mathbf{A}$ hat Coegalisatoren.

6.3 Existenz von Faktorisierungsstrukturen und der Zusammenhang zu Limiten

Die Existenz von Faktorisierungsstrukturen und der Zusammenhang zu Limiten wird in [1], Abschnitt 15, ausführlich behandelt. Der Vollständigkeit halber seien hier nur exemplarisch zwei Sätze aufgeführt.

Satz 6.3.1 ([1],(15.14)) Ist E eine Klasse von Morphismen in $\mathbf{A}$, dann ist $\mathbf{A}$ genau dann eine $(E, \mathbb{M})$-Kategorie für ein $\mathbb{M}$, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(1) Iso $\subset E \subset$ Epi.

(2) E ist unter Komposition abgeschlossen.

(3) Für jedes $A \xrightarrow{e} B \in E$ und jedes $A \xrightarrow{f} C$ gibt es ein Pushout-Quadrat

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\overline{f}"] \\ C \arrow[r, "\overline{e}"'] & D \end{tikzcd}$$

mit $\overline{e} \in E$.

(4) Für jede Quelle $(A, (A \xrightarrow{e_i} A_i)_I)$ existiert ein multipler Pushout $((p_i)_I, B)$, so dass (für alle $i \in I$) $p_i \cdot e_i =: e \in E$ ist.

Satz 6.3.2 ([1],(15.25)) Sei **A** vollständig, well-powered und extremally co-well-powered. Dann gilt:

(1) **A** ist eine (ExtrEpi,MQ)-Kategorie.

(2) Ist **A** co-well-powered, so ist **A** eine (Epi,ExtrMQ)-Kategorie.

(3) Falls reguläre Epimorphismen in **A** unter Komposition abgeschlossen sind, so ist **A** eine (RegEpi,MQ)-Kategorie.

Anhang A

Übungsaufgaben

Die folgenden Aufgaben wurden im Übungsbetrieb der in der Einführung erwähnten Vorlesung gestellt. Diese dienten nicht nur zur Vertiefung des bereits behandelten Stoffes, sondern stellten auch eine Ergänzung zur Vorlesung dar. Es werden daher in manchen Aufgaben Konzepte und Begriffe definiert und behandelt, die im bisherigen Text noch nicht vorkamen, jedoch wichtiger Bestandteil der Kategorientheorie sind.

A.1 Kategorien und Funktoren

1. Eine *Kategorie zweiten Typs* $\mathbf{C}$ ist durch folgende Daten gegeben:

   - Eine Klasse $\operatorname{ob}\mathbf{C}$ von $\mathbf{C}$-Objekten,
   - zu jedem Paar A, B von $\mathbf{C}$-Objekten eine Menge $\hom_{\mathbf{C}}(A, B)$,
   - zu jedem Tripel A, B, C von $\mathbf{C}$-Objekten eine Abbildung

   $$c_{ABC} : \hom_{\mathbf{C}}(B, C) \times \hom_{\mathbf{C}}(A, B) \longrightarrow \hom_{\mathbf{C}}(A, C),$$

   so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

   (a) Zu jedem $\mathbf{C}$-Objekt A existiert $1_A \in \hom_{\mathbf{C}}(A, A)$, so daß für alle $f \in \hom_{\mathbf{C}}(A, B)$

   $$c_{AAB}(f, 1_A) = f \text{ und } c_{ABB}(1_B, f) = f$$

   gilt.

   (b) Für jedes Quadrupel A, B, C, D von $\mathbf{C}$-Objekten kommutiert folgendes Diagramm:

   $$\begin{tikzcd}
   \hom_{\mathbf{C}}(C,D) \times \hom_{\mathbf{C}}(B,C) \times \hom_{\mathbf{C}}(A,B) \arrow[r, "1\times c_{ABC}"] \arrow[d, "c_{BCD}\times 1"'] & \hom_{\mathbf{C}}(C,D) \times \hom_{\mathbf{C}}(A,C) \arrow[d, "c_{ACD}"] \\
   \hom_{\mathbf{C}}(B,D) \times \hom_{\mathbf{C}}(A,B) \arrow[r, "c_{ABD}"'] & \hom_{\mathbf{C}}(A,D)
   \end{tikzcd}$$

   Zeige, daß Kategorien (wie in der Vorlesung definiert) und Kategorien zweiten Typs identische Konzepte sind.

2. Untersuche, ob **Ring**, **Grp**, $\mathbf{Met}_c$ oder **Field** initiale bzw. terminal Objekte besitzen und charakterisiere diese.

3. Für eine Menge X sei $\mathcal{P}X$ die Potenzmenge von X. Setze $X \longmapsto \mathcal{P}X$ auf zwei Arten (kovariant und kontravariant) zu einem Funktor $\mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ fort.

4. Seien $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ und $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ Funktoren. Die *Kommakategorie* $(F \downarrow G)$ ist wie folgt definiert:

   - Objekte sind Tripel (A, f, B), $A \in \operatorname{ob} \mathbf{A}$, $B \in \operatorname{ob} \mathbf{B}$, $FA \xrightarrow{f} GB$ ein $\mathbf{C}$-Morphismus.
   - Morphismen von (A, f, B) nach (A', f', B') sind Paare $(A \xrightarrow{g} A', B \xrightarrow{h} B')$, so daß

   $$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "f"'] & FA' \arrow[d, "f'"] \\ GB \arrow[r, "G(h)"'] & GB' \end{tikzcd}$$

   kommutiert.

   (a) Zeige, daß $(F \downarrow G)$ eine Kategorie ist.
   (b) Stelle $(A \downarrow \mathbf{C})$ und $(\mathbf{C} \downarrow A)$ (siehe Kapitel 2.2) als Kommakategorien da.
   (c) Bestimme $(\mathrm{id}_{\mathbf{C}} \downarrow \mathrm{id}_{\mathbf{C}})$.

5. Sei **Mat** wie folgt definiert: Objekte sind natürliche Zahlen, Morphismen von n nach m sind $n \times m$ Matrizen über $\mathbb{R}$, die Komposition ist durch Matrix-Multiplikation gegeben.

   Zeige: **Mat** ist äquivalent zur Kategorie der endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräume und linearen Abbildungen.

6. Sei B eine Boolesche Algebra mit kleinstem Element 0. $x \in B$ ist ein *Atom*, falls $0 \neq x$ und für alle $y \in B$ gilt: $0 \leq y \leq x \Longrightarrow y = 0$ oder $y = x$. Eine vollständige Boolesche Algebra B heißt *atomar*, falls für alle $x \in B$

   $$x = \sup\{a \in B \,|\, a \leq x \text{ und } a \text{ ist ein Atom}\}.$$

   Sei **Caba** die Kategorie der vollständigen Booleschen Algebren und Infima sowie Suprema bewahrenden Abbildungen.

   Zeige: **Caba** und $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ sind äquivalent.

   Hinweis: $\mathcal{P}X$ ist eine vollständige, atomare Boolesche Algebra.

A.2 Natürliche Transformationen

1. Seien Funktoren und natürliche Transformationen wie folgt gegeben:

   $$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathbf{B} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathbf{C}. \end{tikzcd}$$

   Zeige:

(a) Für alle $A \in \operatorname{ob} \mathbf{A}$ gilt $G'\alpha_A \cdot \beta_{FA} = \beta_{F'A} \cdot G\alpha_A$.

(b) $\beta * \alpha := (G'\alpha_A \cdot \beta_{FA})_A$ ist eine natürliche Transformation $GF \longrightarrow G'F'$. Man nennt $\beta * \alpha$ das *horizontale Kompositum* von α und β.

(c) $*$ ist assoziativ. Bestimme neutrale Elemente bezüglich $*$.

(d) Sei nun

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\alpha'"] & \bullet \arrow[r, bend left=50] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\beta"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta'"] & \bullet \end{tikzcd}$$

gegeben. Beweise das *Vertauschungsgesetz*

$$(\beta' \cdot \beta) * (\alpha' \cdot \alpha) = (\beta' * \alpha') \cdot (\beta * \alpha). \tag{V}$$

(e) Sei M eine Menge mit Operationen $M \times M \xrightarrow{\cdot} M$ und $M \times M \xrightarrow{*} M$, mit demselben neutralen Element e, welche dem Vertauschungsgesetz (V) genügen. Zeige: $\cdot = *$ und beide sind kommutativ.

2. Sei G eine Gruppe, $f : G \longrightarrow G$ ein Homomorphismus. Zeige: f ist ein innerer Automorphismus genau dann, wenn f, aufgefasst als Funktor, natürlich isomorph zu 1_G ist.

A.3 Produkte und Coprodukte

1. Sei $\mathbf{A}$ eine Kategorie mit Produkten, I eine Menge und $\{I_j | \, j \in J\}$ eine Partition von I. Zeige, daß für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ von $\mathbf{A}$-Objekten gilt:

$$\prod_{i \in I} A_i \cong \prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} A_i.$$

2. Zeige, daß für Mengen A, B, C die induzierte Abbildung

$$(A \times B) + (A \times C) \longrightarrow A \times (B + C) \tag{D}$$

ein Isomorphismus ist. Zeige, daß nicht jede Kategorie mit endlichen Produkten und Coprodukten (D) erfüllt.

3. Sei $(A_i \xrightarrow{f_i} B_i)_{i \in I}$ eine Familie von Morphismen, so daß die Produkte $(\prod A_i \xrightarrow{\pi_j} A_j)_{j \in I}$ und $(\prod B_i \xrightarrow{\pi'_j} B_j)_{j \in I}$ existieren. Der eindeutig bestimmte Morphismus $\prod f_i : \prod A_i \longrightarrow \prod B_i$, welcher für alle $j \in I$

$$\begin{tikzcd} \prod A_i \arrow[r, "\prod f_i"] \arrow[d, "\pi_j"'] & \prod B_i \arrow[d, "\pi'_j"] \\ A_j \arrow[r, "f_j"'] & B_j \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, wird als *Produkt der f_j* bezeichnet. Zeige: Ist f_j für alle $j \in I$ ein(e) Monomorphismus, bzw. ein Schnitt, Retraktion, Isomorphismus, so auch $\prod f_i$. Gilt eine analoge Aussage für Epimorphismen?

4. Ein Morphismus $m \in \mathrm{mor}(\mathbf{C})$ heißt *starker Monomorphismus*, falls m ein Monomorphismus ist und die folgende Bedingung erfüllt: Gilt $m \cdot f = g \cdot e$ für einen Epimorphismus e, so existiert ein Morphismus h, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ \bullet \arrow[r, "m"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Zeige:

(a) Jeder Schnitt ist ein starker Monomorphismus und jeder starke Monomorphismus ist extremal.

(b) Die Klasse der starken Monomorphismen ist abgeschlossen unter Komposition und Produkten.

(c) Für Morphismen m, n gilt stets: Ist $n \cdot m$ ein starker Monomorphismus, so auch m.

A.4 Adjunktionen

1. Seien $(P, \leq)$ und $(Q, \leq)$ partiell geordnete Mengen, aufgefasst als Kategorien $\mathbf{P}$ bzw. $\mathbf{Q}$. Dann können monotone Abbildungen $g : (P, \leq) \longrightarrow (Q, \leq)$ und $f : (Q, \leq) \longrightarrow (P, \leq)$ als Funktoren $g : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{Q}$ bzw. $f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{P}$ betrachtet werden.

(a) Verdeutliche, was eine natürliche Transformation $g \xrightarrow{\alpha} g'$ für $g, g' : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{Q}$ ist. Was bedeutet insbesondere die Existenz natürlicher Transformationen $\mathrm{id}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow gf$ und $fg \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{P}}$?

(b) Charakterisiere eine Adjunktion $f \dashv g$ mit Hilfe der Ordnungsrelationen. [Hinweis: Benutze die Beschreibung einer Adjunktion mittels hom-Mengen.]

(c) Zeige: Gibt es natürliche Transformationen $\mathrm{id}_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\eta} gf$ und $fg \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{id}_{\mathbf{P}}$, so folgt schon $g\varepsilon \cdot \eta_g = \mathrm{id}_g$ und $\varepsilon_f \cdot f\eta = \mathrm{id}_f$, d.h. $f \underset{\varepsilon}{\overset{\eta}{\dashv}} g$.

(d) Für Elemente $a_i \in P$, $i \in I$, bezeichne $\bigwedge_{i \in I} a_i$ deren Infimum. Zeige: Gilt $f \dashv g$, so bewahrt g Infima. [Hinweis: Benutze die Darstellung der Adjunktion in (b).]

2. Zeige, dass der Funktor $A \times \_ : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ Colimiten bewahrt.

3. *Existenz freier Gruppen.*

Bekanntlich ist die Kategorie $\mathbf{Grp}$ vollständig und der Vergissfunktor $U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ bewahrt Limiten. Im Folgenden schreiben wir Gruppen multiplikativ, d.h. für $G \in \mathrm{ob}(\mathbf{Grp})$ ist $G = (UG, \cdot, (-)^{-1}, 1)$. Zeige:

(a) Sei X eine Menge. Es gibt eine Kardinalzahl $\alpha = \alpha(X)$, so dass für alle Gruppen G und Abbildungen $f : X \longrightarrow UG$ gilt $\mathrm{card}(US_f) \leq \alpha$, wobei $S_f := \langle f[X] \rangle$ die von $f[X]$ erzeugte Untergruppe von G ist. [Hinweis: Jedes $s \in US_f$ hat eine Darstellung $s = f(x_1)^{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot f(x_n)^{\epsilon_n}$ mit $x_i \in X$ und $\epsilon_i \in \{1, -1\}$.]

(b) Es gibt eine obere Schranke β für die Anzahl der Gruppenstrukturen auf einer Menge X. Insbesondere ist die Klasse aller Gruppen G mit $UG = X$ eine Menge.

(c) Konstruiere zu einer Menge X eine U-Lösungsmenge. Folgere, dass zu jeder Menge X eine freie Gruppe über X existiert.

(d) **Grp** ist well-powered.

A.5 Limiten und Vollständigkeit

1. Zeige, dass die Kategorien **Grp**, **Ab**, **R-Mod** und **Ring** vollständig sind. Warum ist **Field** weder vollständig noch covollständig?

2. *Reflektionen und (Co-)Limiten.*

   Im Folgenden sei $\mathbf{A}$ eine volle Unterkategorie von $\mathbf{B}$ und $E : \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$ der Einbettungsfunktor. Dann heißt $\mathbf{A}$

   (i) *iso-abgeschlossen* in $\mathbf{B}$, falls aus $EA \cong B$ für $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$, $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ stets $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ folgt;

   (ii) *reflexiv* in $\mathbf{B}$, falls E einen Linksadjungierten $R \underset{\varepsilon}{\overset{\eta}{\longrightarrow\!\!\dashv}} E$ hat;

   (iii) *epi-reflexiv* (bzw. *mono-reflexiv*) in $\mathbf{B}$, falls $\mathbf{A}$ reflexiv in $\mathbf{B}$ ist und η_B für alle $B \in \mathrm{ob}(\mathbf{B})$ (siehe (ii)) ein Epimorphismus (bzw. Monomorphismus) ist;

   (iv) *abgeschlossen unter Limiten*, falls gilt:

   $$D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A},\ (L, (l_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})}) \approx \lim(E \cdot D) \quad \Longrightarrow \quad L \in \mathrm{ob}(\mathbf{A}),$$

   d.h. $(L, (l_i))$ schon Limes von D ist.

   Zeige:

   (a) $\mathbf{A}$ mono-reflexiv in $\mathbf{B} \Longrightarrow \mathbf{A}$ epi-reflexiv in $\mathbf{B}$.

   (b) $\mathbf{A}$ reflexiv und iso-abgeschlossen in $\mathbf{B} \Longrightarrow \mathbf{A}$ abgeschlossen unter Limiten in $\mathbf{B}$.
   [Hinweis: Man überlege sich zunächst, dass η_B schon ein Isomorphismus ist, falls es ein Schnitt ist.]

   (c) Ist $\mathbf{A}$ reflexiv in $\mathbf{B}$, $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{A}$ und $((c_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})}, C)$ Colimes von $E \cdot D$, so ist $((\eta_C \cdot c_i)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})}, RC)$ Colimes von D (siehe (ii)).

   (d) Volle, reflexive, iso-abgeschlossene Unterkategorien (co-)vollständiger Kategorien sind (co-)vollständig.

   (e) Gib ein (nicht-triviales!) Beispiel für eine reflexive Unterkategorie einer Kategorie an.

3. *Limiten in Funktorkategorien.*

   Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Kategorien, $\mathbf{A}$ klein und $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ ein Diagramm. Für jedes $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ habe $\mathrm{Ev}(\_, A) \cdot D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{B}$ einen Limes $(L^A, (l_i^A)_{i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})})$. Zeige:

   (a) Die Zuordnung

   $$L : \mathrm{ob}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathrm{ob}(\mathbf{B}), \quad A \longmapsto L^A$$

   kann in kanonischer Weise zu einem Funktor $L : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ erweitert werden.

(b) Für jedes $i \in \mathrm{ob}(\mathbf{I})$ wird durch $(\lambda_i)_A := l_i^A$, $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$, eine natürliche Transformation $\lambda_i : L \longrightarrow D(i)$ definiert.

(c) $(L, (\lambda_i))$ ist Limes von D.

Limiten in Funktorkategorien werden also durch ‘punktweises’ Bilden des Limes konstruiert. Insbesondere hat $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ alle Limiten, die in $\mathbf{B}$ existieren.

4. Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Kategorien, $\mathbf{A}$ klein und $\mathbf{B}$ habe Pullbacks (!). Zeige, dass ein Morphismus $F \xrightarrow{\eta} G \in \mathrm{mor}(\mathbf{B}^{\mathbf{A}})$ genau dann ein Monomorphismus ist, wenn für jedes $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A})$ η_A ein Monomorphismus ist.

5. Sei $\mathbf{A}$ eine kleine Kategorie. Zeige, dass die Yoneda-Einbettung

$$E : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}}, \qquad A \xrightarrow{f} B \;\longmapsto\; \mathbf{A}(\_, A) \xrightarrow{\mathbf{A}(\_,f)} \mathbf{A}(\_, B)$$

Limiten bewahrt.
[Hinweis: Verdeutliche zunächst, wie für $C \xrightarrow{f} D$ die natürliche Transformation $\mathbf{A}(\_, f) : \mathbf{A}(\_, C) \longrightarrow \mathbf{A}(\_, D)$ wirkt. Ferner liefert jede natürliche Quelle $\Big(F, \Big(F \xrightarrow{\varphi_i} \mathbf{A}(\_, D(i))\Big)\Big)$ für $E \cdot D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{A}^{\mathrm{op}}}$ für jedes $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{A}), x \in FA$ eine natürliche Quelle $((\varphi_i)_A(x))$ für D. Dies liefert dann Morphismen $\lambda_{A,x} : A \longrightarrow L$, welche schließlich die gewünschte natürliche Transformation $\lambda : F \longrightarrow \mathbf{A}(\_, L)$ geben.]

A.6 Faktorisierungsstrukturen

1. Zeige:

(a) In **Set** ist jeder Epimorphismus ein regulärer Epimorphismus.

(b) In ‘algebraischen’ Kategorien (wie etwa **Grp**, **Ring**, **R-Mod**, etc.), in denen der Homomorphiesatz gilt, sind die regulären Epimorphismen genau die surjektiven Homomorphismen.

(c) In jeder Kategorie $\mathbf{A}$ gilt:

$$\text{Retraktionen} \;\subset\; \text{RegEpi} \;\subset\; \text{ExtrEpi} \;\subset\; \text{Epi}.$$

(d) Ein Monomorphismus m in $\mathbf{A}$ ist genau dann ein starker Monomorphismus (vgl. A.3), wenn $\mathbf{A}$ die eindeutige $(\text{Epi}, \{m\})$-diagonal Eigenschaft hat. Jeder reguläre Monomorphismus ist auch ein starker Monomorphismus.

2. Sei $(E, \mathbb{M})$ eine Faktorisierungsstruktur für Quellen auf einer Kategorie $\mathbf{A}$. Zeige:

(a) $(E, \mathbb{M})$-Faktorisierungen sind im wesentlichen eindeutig, d.h. ist $\mathcal{S}$ eine Quelle und sind

$$\mathcal{S} = \mathcal{M} \cdot e = \mathcal{M}' \cdot e'$$

Faktorisierungen mit $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in \mathbb{M}$ und $e, e' \in E$, so existiert ein (eindeutig bestimmter) Isomorphismus h mit

$$\mathcal{M} \cdot h = \mathcal{M}' \quad \text{und} \quad h \cdot e' = e.$$

(b) $E \subset \text{Epi}$ und $\mathbb{M}$ enthält alle extremalen Monoquellen in $\mathbf{A}$.

(c) $E \cap \mathbb{M} = \text{Iso}$.

Literaturverzeichnis

[1] J. Adámek, H. Herrlich, G. E. Strecker: *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats*, John Wiley and Sons, New York, 1990.

[2] J. Adámek, J. Rosický: *Locally Presentable and Accessible Categories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[3] M. Barr, C. Wells: *Category theory for computer science*, Prentice Hall, London, 1995^2.

[4] M. Barr, C. Wells: *Toposes, triples and theories*, Springer Verlag, New York, 1985.

[5] F. Borceaux: *Handbook of Categorical Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[6] M. Deutsch: *Einführung in die Grundlagen der Mathematik*, Uni-Druckerei Bremen, Bremen, 1999.

[7] P. R. Halmos: *Naive Mengenlehre*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1976^4.

[8] H. Herrlich, G. E. Strecker: *Category Theory*, Heldermann Verlag Berlin, Berlin, 1979.

[9] S. Mac Lane: *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, New York, 1998^2.

[10] S. Mac Lane, I. Moerdijk: *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer Verlag, New York, 1992.

[11] D. Pumplün: *Elemente der Kategorientheorie*, Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1999.

[12] P. Taylor: *Practical foundations of mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

Index